Mecánica Teórica
Mecánica Hamiltoniana

Curso impartido en la Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza
(versión no finalizada, última revisión Diciembre 2015)

Manuel F. Rañada

Departamento de Física Teórica
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza

1. Formalismo Hamiltoniano I : Ecuaciones de Hamilton
2. Formalismo Hamiltoniano II : Paréntesis de Poisson
3. Ecs. de Hamilton y formalismo variacional
4. Formalismo Hamiltoniano III
5. Transformaciones Canónicas
6. Funciones generatrices
7. Familias de transformaciones canónicas

`[Filename: MecHamilt15(Mfran).tex]`

ÍNDICE GENERAL

1 Formalismo Hamiltoniano I : Ecuaciones de Hamilton **2**
1.1 Introducción 2
1.1.1 Sistemas Dinámicos y sistemas Hamiltonianos 2
1.1.2 Ecuaciones de segundo orden y ecuaciones de 1er orden 4
1.2 Transformación de Legendre 4
1.2.1 Definición y conceptos básicos 4
1.2.2 La transformación de Legendre para funciones de varias variables 5
1.3 Transformación de Legendre y Ecuaciones de Hamilton 7
1.4 Formalismo Lagrangiano y formalismo Hamiltoniano 10
1.5 Estudio de varios casos particulares 11

2 Formalismo Hamiltoniano II : Paréntesis de Poisson **18**
2.1 Paréntesis de Poisson 18
2.1.1 Evolución temporal de una variable dinámica 18
2.1.2 Paréntesis de Poisson : Definición y propiedades 19
2.2 Paréntesis de Poisson fundamentales y Ecs. de Hamilton 20
2.2.1 Paréntesis de Poisson fundamentales 20
2.2.2 Ecs. de Hamilton y Paréntesis de Poisson 21
2.3 Paréntesis de Poisson y constantes del movimiento 21
2.4 Estudio de tres casos particulares 24
2.4.1 Oscilador armónico bidimensional 24
2.4.2 Problema de Kepler bidimensional 24
2.4.3 Potencial central 25

3 Ecs. de Hamilton y formalismo variacional **26**
3.1 Introducción 26
3.2 Principio de Hamilton modificado 27
3.3 Comentarios 29

4 Formalismo Hamiltoniano III **31**
4.1 Introducción 31
4.2 Formalismo Hamiltoniano utilizando la matriz Ω 31

4.2.1 Nueva notación . . . 31
4.2.2 Resumen comparativo entre las dos notaciones del formalismo Hamiltoniano . . . 34
4.3 Teorema del Paréntesis de Poisson . . . 34

5 Transformaciones Canónicas **37**
5.1 Transformaciones canonoides . . . 37
5.1.1 Introducción . . . 37
5.1.2 Transformaciones canonoides y paréntesis de Poisson . . . 39
5.2 Transformaciones canonoides y Hamiltonianos cuadráticos . . . 41
5.3 Transformaciones Canónicas . . . 43
5.3.1 Transformaciones Canónicas generalizadas . . . 44
5.3.2 Transformaciones Canónicas . . . 45
5.4 Paréntesis de Lagrange . . . 47

6 Funciones generatrices **50**
6.1 Introducción . . . 50
6.2 Función generatriz I : Cálculo directo . . . 50
6.2.1 Caso independiente del tiempo . . . 50
6.2.2 Caso dependiente del tiempo . . . 52
6.3 Función generatriz II : Métodos variacionales . . . 55
6.4 Funciones generatrices de tipo F_1, F_2, F_3, y F_4 . . . 57
6.4.1 Introducción . . . 57
6.4.2 Transformaciones canónicas generadas por F_1 . . . 57
6.4.3 Transformaciones canónicas generadas por F_2 . . . 58
6.4.4 Transformaciones canónicas generadas por F_3 . . . 59
6.4.5 Transformaciones canónicas generadas por F_4 . . . 60
6.4.6 Dependencia temporal . . . 62
6.5 Funciones generatrices: Estudio de varios casos particulares . . . 62
6.5.1 Caso particular no. 1 : Una función generatriz de tipo F_1 . . . 62
6.5.2 Caso particular no. 2 : Una función generatriz de tipo F_2 relacionada con la Identidad . . . 63
6.5.3 Caso particular no. 3 : Una función generatriz de tipo F_2 relacionada con las transformaciones puntuales . . . 63
6.5.4 Caso particular no. 4 : Una función generatriz de tipo F_2 relacionada con las rotaciones . . . 64

7 Funciones generatrices II **65**
7.1 Introducción . . . 65
7.2 Teorema de Liouville para transformaciones canónicas . . . 65
7.2.1 Método I: Función F_1 . . . 65
7.2.2 Método II: Función F_2 . . . 67

7.3 Familias de transformaciones canónicas I 67
7.3.1 Grupos uni-paramétricos de transformaciones 68
7.3.2 Teorema de Liouville y sistemas de Liouville 70
7.4 Familias de transformaciones canónicas II 71
7.4.1 Transformaciones infinitesimales y P. de P. 71
7.4.2 Acción de un grupo de transformaciones sobre una variable dinámica. Evolución temporal 72

Bibliografía

[AbrMar] Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden, *Foundations of mechanics*, xxii+xvi+806 pp. (Benjamin/Cummings Pub., 2nd ed., 1978).

[Gold] Herbert Goldstein, *Mecánica clásica*, xi+793 pp. (Reverte, 2da ed., 1988).

[JosSal] Jorge V. José, Eugene J. Saletan, *Classical dynamics: A contemporary approach*, xxvi+670 pp. (Cambridge University Press, 1998).

[KibBer] Tom W. Kibble, Frank H Berkshire, *Classical mechanics*, xxii+361 pp. (Addison Wesley, 4th ed., 1996).

[Mar] Jerry B. Marion, *Classical dynamics of particles and systems*, xv + 576 pp. (Academic Press, 1965).

[Marmo] G. Marmo, E.J. Saletan, A. Simoni, B. Vitale, *Dynamical systems: A differential geometric approach to symmetry and reduction*, xii+377 pp. (J. Wiley, Chichester, 1985).

[SaletCr] Eugene J. Saletan, Alan H. Cromer, *Theoretical mechanics*, xi + 376 pp. (J. Wiley, 1971).

[SudMuk] E.C. Sudarshan, N. Mukunda, *Classical dynamics: A modern perspective*, xi+615 pp. (John Wiley, 1974).

[Vilasi] Gaetano Vilasi, *Hamiltonian dynamics*, xvi+440 pp. (World Scientific, 2001).

[Wood1] Nicholas M.J. Woodhouse, *Introduction to analytical dynamics*, xi+316 pp. (Oxford University Press, 1987).

[Wood2] Nicholas M.J. Woodhouse, *Introcucción a la mecánica analítica*, 193 pp. (Alianza Universidad, Madrid 1990).

Capítulo 1

Formalismo Hamiltoniano I : Ecuaciones de Hamilton

1. Introducción
2. Transformación de Legendre
3. Transformación de Legendre y Ecuaciones de Hamilton
4. Formalismo Lagrangiano y formalismo Hamiltoniano
5. Estudio de varios casos particulares

1.1 Introducción

1.1.1 Sistemas Dinámicos y sistemas Hamiltonianos

El objetivo de este capítulo es introducir un nuevo formalismo para el estudio de los sistemas mecánicos. Sin embargo, en lugar de ir directamente al mundo de la mecánica, presentaremos primero a los sistemas mecánicos como casos particulares de unos sistemas más generales que se conocen como sistemas dinámicos.

Por sistema dinámico entendemos un sistema que puede estar en distintos estados y que, además, el estado en que se encuentra cambia o evoluciona con el trascurso del tiempo.

(i) El estado en que se encuentra el sistema puede ser caracterizado, en cada instante de tiempo, por los valores que toman N variables reales $x_1, x_2, \ldots, x_N$, que pueden ser geométricamente interpretadas como las coordenadas de un punto en un espacio N-dimensional denominado "espacio de fases" del sistema.

(ii) La evolución temporal del sistema está totalmente determinada por los cambios que sufren las N variables $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Las N funciones $x_k = x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, no son conocidas a priori sino que deben ser obtenidas como solución de un sistema de N ecuaciones diferenciales de 1er orden

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_N, t)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, N\,.$$

Estas ecuaciones se denominan ecuaciones de evolución del sistema.

A modo de ejemplo, consideremos, por simplicidad, un sistema dinámico caracterizado por dos variables x e y. El espacio de fases será bidimensional y las ecuaciones de evolución serán de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t)\,, \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y, t)\,.$$

Un caso particular importante, que será estudiado con detalle, será el caso en que exista una función $H = H(x, y, t)$ tal que las funciones f y g son de la forma

$$f = \frac{\partial H}{\partial y}\,, \quad g = -\frac{\partial H}{\partial x}\,,$$

de tal modo que las ecuaciones de evolución del sistema adoptan la siguiente forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}\,, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}\,.$$

En este caso el sistema dinámico se denomina *sistema Hamiltoniano* y la función H Hamiltoniano del sistema.

Por consiguiente, y de acuerdo con esta aproximación, un sistema Hamiltoniano debe ser considerado como un caso especial de sistema dinámico. Podemos representar esta situación de la siguiente forma

$$\text{Sistemas Hamiltonianos} \quad \subset \quad \text{Sistemas Dinámicos}$$

Los sistemas Hamiltonianos son interesantes por diversas razones. En particular resulta conveniente resaltar los siguientes dos puntos

(i) Desde el punto de vista matemático, los sistemas Hamiltonianos poseen propiedades matemáticas específicas bastante interesantes.

(ii) Desde el punto de vista físico, resulta que todo sistema Lagrangiano regular determina un sistema Hamiltoniano asociado.

Nos proponemos desarrollar un nuevo formalismo para la Mecánica sustituyendo el formalismo Lagrangiano por este nuevo formalismo Hamiltoniano.

1.1.2 Ecuaciones de segundo orden y ecuaciones de 1er orden

Consideremos un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$y_i'' = f_i(x, y, y')\,, \quad i = 1, , \ldots, n.$$

Supongamos que introducimos el siguiente cambio en la notación

$$u_i = y_i\,, \quad u_{n+i} = y_i'\,.$$

Entonces el anterior sistema de n ecuaciones se transforma en el siguiente sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de 1er orden

$$\begin{aligned} u_i' &= u_{n+i} \\ u_{n+i}' &= f_i(x, u_j, u_j') \end{aligned}$$

Esta propiedad es cierta para todo sistema de ecuaciones de segundo orden y por consiguiente también es cierta para las ecuaciones de Lagrange. En efecto, las n ecuaciones de Lagrange que, escritas en forma normal con las aceleraciones despejadas, es un sistema de la forma

$$\ddot{q}_i = f_i(q, \dot{q}_i, t)\,, \quad i = 1, , \ldots, n,$$

se pueden presentar como un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de 1er orden

$$\dot{u}_\alpha = g_\alpha(u_\beta, t)\,, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n,$$

con las funciones g_α definidas de la forma

$$g_i = u_{n+i}\,, \quad g_{n+i} = f_i(u_\beta, t)\,.$$

Esta forma de presentar las ecuaciones de Lagrange tiene dos grandes inconvenientes. En primer lugar una notable falta de simetría ya que el primer grupo funciones g_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, son claramente distintas a las funciones g_{n+i} del segundo grupo. En segundo lugar la forma peculiar que tienen estas $2n$ ecuaciones no se mantiene invariante bajos cambios de coordenadas.

Nos proponemos introducir un nuevo formalismo que permita presentar las n ecuaciones de Lagrange como un sistema de $2n$ ecuaciones de 1er orden pero de una forma que no tenga los inconvenientes del método general anteriormente expuesto.

1.2 Transformación de Legendre

1.2.1 Definición y conceptos básicos

Consideremos una función $f = f(y)$ diferenciable y tal que $d^2f/dy^2 \neq 0$. En ocasiones resulta conveniente sustituir la variable y por otra nueva variable z que resulte más adecuada para ciertos propósitos. Un caso particular es cuando la nueva variable z está definida de la forma $z = df/dy$. En términos geométricos el conjunto de puntos $(y, f(y))$ representa una curva y el

valor de z representa la pendiente de la tangente a la curva. Por consiguiente el cambio de y por z se puede interpretar como una sustitución de la curva por la familia asociada de rectas tangentes. Es claro que la curva determina la familia de rectas tangentes y, recíprocamente, una familia de rectas (que no se crucen un punto y que no sean no paralelas) determina una curva envolvente.

Más concretamente, si $f''(y) \neq 0$ entonces la ecuación $z = f'(y)$ puede ser resuelta para y y de esta forma obtener la función $y = y(z)$. Entonces se denomina transformación de Legendre de la función $f(y)$, y se denota por $\mathcal{L}f(z)$, a la función definida de la siguiente forma

$$\mathcal{L}f(z) = yf'(y) - f(y) = zy(z) - f[y(z)]\,.$$

Una propiedad importante es que si aplicamos dos veces la transformación de Legendre recuperamos la función de partida. Esto significa que $\mathcal{L}(\mathcal{L}f) = f$ y que por consiguiente la relación entre f y $\mathcal{L}f$ es uno-a-uno. Además la transformación inversa de $\mathcal{L}$ también es de tipo Legendre.

La transformación de Legendre es interesante desde un punto de vista puramente matemático. Pero lo que hace que sea realmente interesante es que hay determinadas teorías, como ciertos formalismos adecuados para el estudio de la termodinámica o la mecánica, cuyo estudio se inicia utilizando cierta variable y y posteriormente se considera conveniente desarrollar la teoría utilizando una nueva variable z. En estos casos el nuevo formalismo (basado en la utilización de la variable z) se puede obtener como el resultado de aplicar la transformación de Legendre al antiguo formalismo (basado en la variable y).

1.2.2 La transformación de Legendre para funciones de varias variables

Denotemos por M el conjunto $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$

$$M = \{m = (x, y) \,/\, x \in \mathbb{R}^r \,,\, y \in \mathbb{R}^s\}$$

y consideremos una función diferenciable F en M

$$F \;:\; M \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto F(x, y)$$

que suponemos que satisface la siguiente propiedad

$$\det\Big[\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}\Big] \neq 0\,, \quad i, j = 1, 2, \ldots, s.$$

Denotemos por z_i las funciones

$$z_i = \frac{\partial F}{\partial y_i}\,, \quad z_i = z_i(x, y)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Entonces, utilizando z_i podemos introducir un nuevo conjunto N de la siguiente forma

$$N = \{n = (x, z) \,/\, x \in \mathbb{R}^r \,,\, z \in \mathbb{R}^s\}$$

La función F permite definir una aplicación, que denotamos por D_F y denominamos transformación de Legendre, entre los conjuntos M y N de la siguiente forma

$$D_F \ : \ M \to N \, , \ (x_i, y_j) \to (x_i, z_j) \, , \ z_j = \frac{\partial F}{\partial y_j} \, .$$

Esto es, a cada punto del M (y-espacio) le corresponde un punto de N (z-espacio); la aplicación D_F deja invariantes las primeras variables x_i y sustituye las segundas variables y_i por las z_i.

Conviene resaltar que la aplicación D_F depende de F. Otra función $\widetilde{F} : M \to \mathbb{R}$, $\widetilde{F} \neq F$, determinará otra aplicación $\widetilde{D}_F : M \to N$, $(x, y) \to (x, \widetilde{z})$, que en general será distinta en el sentido de que $\widetilde{z} \neq z$ (aunque también puede darse el caso de que $\widetilde{F} \neq F$ y sin embargo $D_F = \widetilde{D}_F$).

Teniendo en cuenta que las z_i son funciones de la forma $z_i = z_i(x, y)$, entonces, de acuerdo con el teorema de la función implícita, podrán resolverse para las y_j si se cumple la condición

$$\det\Big[\frac{\partial z_i}{\partial y_j}\Big] = \det\Big[\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}\Big] \neq 0 \, , \quad i, j = 1, 2, \ldots, s.$$

En este caso se puede definir una nueva función G de la siguiente forma

$$G \ : \ N \to \mathbb{R} \, , \quad G(x, z) = \sum_j y_j z_j - F \, .$$

donde expresión de G debe entenderse de la siguiente forma

$$G(x, z) = \sum_j y_j(x, z) z_j - F[x, y(x, z)] \, .$$

Entonces se comprueba que las siguientes igualdades, que relacionan F con G, son ciertas

$$(i) \quad \frac{\partial G}{\partial z_k} = y_k \, , \qquad (ii) \quad \frac{\partial G}{\partial x_k} = -\frac{\partial F}{\partial x_k} \, , \qquad k = 1, 2, \ldots, s \, .$$

Hemos empezado considerando la función F definida en M y hemos construido la función G definida en N. Lo interesante de esta construcción es que posee una enorme simetría. En efecto, poríamos haber empezado considerando la función G definida en N y construir la función F definida en M. Ambos procesos son semejantes. Esta semejanza ya fue resaltada en el caso unidimensional cuando comentamos que la inversa de la transformación de Legendre es una transformación que también es de tipo Legendre.

La siguiente Tabla I resume las características más importantes de la transformación de Legendre y resalta la simetría entre la construcción directa (columna izquierda) y la construcción

inversa (columna derecha).

Sea M el conjunto $M = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ con coordenadas (x, y) $x \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}^s$	Sea N el conjunto $N = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ con coordenadas (x, z) $x \in \mathbb{R}^r$, $z \in \mathbb{R}^s$
Consideremos la función $F : M \to \mathbb{R}$ Denotemos por z_k las derivadas $z_k = \partial F/\partial y_k$	Consideremos la función $G : N \to \mathbb{R}$ Denotemos por y_k las derivadas $y_k = \partial F/\partial z_k$
Introducimos un nuevo conjunto N con coordenadas (x, z)	Introducimos un nuevo conjunto M con coordenadas (x, y)
Utilizando F definimos una nueva función $G : N \to \mathbb{R}\,,\ (x, z) \mapsto G(x, z)$ definida de la forma $G(x, z) = \sum_j y_j z_j - F$	Utilizando G definimos una nueva función $F : M \to \mathbb{R}\,,\ (x, y) \mapsto F(x, y)$ definida de la forma $F(x, y) = \sum_j y_j z_j - G$
La nueva función G satisface $\partial G/\partial x_k = -\,\partial F/\partial x_k$	La nueva función F satisface $\partial F/\partial x_k = -\,\partial G/\partial x_k$

Table I. Table showing the main properties of the Legendre transformation. The left columm starts with the function F on the space M and the right column starts with the function G on the space N.

1.3 Transformación de Legendre y Ecuaciones de Hamilton

El objetivo es la construcción de un nuevo formalismo utilizando los momentos. Recordemos que un Lagrangiano L determina n funciones que denominamos momentos y denotamos por p_k

$$p_k = p_k(q, \dot{q}, t)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Es posible resolver estas ecuaciones para las velocidades $\dot{q}_k$? Esto es, es posible despejar las $\dot{q}_k$ y expresarlas como función de los q_is y los p_is ? De acuerdo con el teorema de la función inversa, la respuesta a esta pregunta es afirmativa siempre que se cumpla

$$\det\left[\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j}\right] \neq 0\,,$$

o equivalentemente

$$\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j\,\partial \dot{q}_k}\right] \neq 0\,.$$

Pero esta condición es precisamente la condición que se obtuvo en su momento como la propiedad que caracterizaba a los Lagrangianos regulares.

Podemos resumir la situación de la siguiente forma:

Proposición 1 *Supongamos que L es un Lagrangiano regular. Entonces es posible obtener los valores de las n velocidades $\dot{q}_k$ como función de las n posiciones q_i y los n momentos p_i.*

Llamaremos espacio de fases de los momentos y lo denotamos por T^*Q al espacio caracterizado por las $2n$ coordenadas q_i y p_i

$$T^*Q = \{(q,p) \mid q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)\,,\; p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)\}$$

Consideremos un Lagrangiano regular L. Entonces L determina una aplicación, que denotamos por D_L y denominamos transformación de Legendre, de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} D_L\;:\;TQ & \to & T^*Q \\ (q_i, \dot{q}_i) & \to & (q_i, p_i)\,,\; p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \end{array}$$

Esto es, a cada punto del espacio de fases de las velocidades TQ le corresponde un punto del espacio de fases de los momentos T^*Q; la aplicación D_L deja invariantes las posiciones q_i y sustituye las velocidades $\dot{q}_i$ por los momentos p_i.

Conviene resaltar que la aplicación D_L depende del Lagrangiano L. No existe una transformación de Legendre única sino que cada función L determina una transformación asociada D_L. Si L y $\widetilde{L}$ son dos Lagrangianos regulares $L \neq \widetilde{L}$ entonces cada uno determina su propia transformación, $L \to D_L$ y $\widetilde{L} \to \widetilde{D}_L$, de tal forma que en general $D_L \neq \widetilde{D}_L$ (aunque también puede ocurrir que $D_L = \widetilde{D}_L$).

Denominamos Hamiltoniano (o función Hamiltoniana), y lo denotamos por H, a la función

$$H\;:\;T^*Q \quad \to \quad \mathbb{R}\,,$$

definida de la forma

$$H(q,p) = \sum_j \dot{q}_j p_j - L\,.$$

La expresión de H puede parecer algo contradictoria ya que el miembro de la derecha depende aparentemente de las velocidades. Es conveniente resaltar que la expresión anterior debe entenderse de la siguiente forma

$$H(q,p) = \sum_j \dot{q}_j(q,p) p_j - L[q, \dot{q}(q,p)]\,,$$

y, por supuesto, si consideramos sistemas que dependen del tiempo entonces tendríamos

$$H(q,p,t) = \sum_j \dot{q}_j(q,p,t) p_j - L[q, \dot{q}(q,p,t), t]\,.$$

Proposición 2 *La evolución temporal de las coordenadas q_i y los momentos p_i está gobernada por las siguientes ecuaciones*

$$(i) \quad \frac{d}{dt}\, q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad (ii) \quad \frac{d}{dt}\, p_i = -\,\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

que se denominan ecuaciones de Hamilton.

Dem.: Recordemos que

$$H(q,p,t) = \sum_j \dot{q}_j(q,p,t)p_j - L[q, \dot{q}(q,p,t), t]$$

(i) La derivada parcial de H con respecto a p_k viene dada por

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \sum_j \Big(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k}\Big) p_j + \dot{q}_k - \sum_j \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Big)\Big(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k}\Big)\,,$$

teniendo en cuenta que la derivada $\partial L/\partial \dot{q}_j$ representa el valor del momento p_j, la expresión anterior se reduce a

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k\,.$$

(ii) Análogamente, la derivada parcial de H con respecto a q_k viene dada por

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_j \Big(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k}\Big) p_j - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_j \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Big)\Big(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k}\Big)\,,$$

de lo que se deduce que

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Big)$$

lo que conduce a

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\,\dot{p}_k\,.$$

□

Conviene resaltar que para obtener estas ecuaciones hemos utilizado la definición de momento p_i y las ecuaciones de Lagrange. En este sentido se puede considerar que las ecuaciones de Hamilton son consecuencia de las ecuaciones de Lagrange. Esto es, si se asume que las ecuaciones de Lagrange son ciertas entonces las ecuaciones de Hamilton también lo son.

Hemos obtenido los valores de las derivadas parciales de H con respecto a q_i y a p_i. Resulta conveniente estudiar también la dependencia de H con respecto al tiempo. En primer lugar la derivada parcial con respecto a t viene dada por

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_j \Big(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t}\Big) p_j - \sum_j \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Big)\Big(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t}\Big) - \frac{\partial L}{\partial t}\,.$$

Teniendo en cuenta de nuevo la definición de momento, obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}\,.$$

Una consecuencia de esta relación es que si un Lagrangiano L independiente del tiempo, esto es $\partial L/\partial t = 0$, entonces el Hamiltoniano H también es independiente del tiempo.

Consideremos ahora la evolución temporal de la función H. Viene dada por

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \Big(\frac{\partial H}{\partial q_k}\Big)\dot{q}_k + \sum_j \Big(\frac{\partial H}{\partial p_k}\Big)\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial t}\,,$$

Sustituyendo $\dot{q}_k$ y $\dot{p}_k$ por sus valores obtenidos de las ecuaciones de Hamilton llegamos a

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \Big(\frac{\partial H}{\partial q_k}\Big)\Big(\frac{\partial H}{\partial p_k}\Big) - \sum_k \Big(\frac{\partial H}{\partial p_k}\Big)\Big(\frac{\partial H}{\partial q_k}\Big) + \frac{\partial H}{\partial t}\,,$$

lo que conduce a

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}\,.$$

En resumen, se cumple la siguiente propiedad. *Si un Lagrangiano L es independiente del tiempo entonces la función H es constante del movimiento.* Podemos resumir esta propiedad de la siguiente forma

$$\text{Si} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \text{entonces} \quad \frac{dH}{dt} = 0\,.$$

1.4 Formalismo Lagrangiano y formalismo Hamiltoniano

La siguiente tabla presenta un resumen comparativo entre el formalismo Lagrangiano y el formalismo Hamiltoniano. Distinguiremos dos apartados.

(i) Propiedades geométricas

Formalismo	Lagrangiano	Hamiltoniano
Espacio	TQ de fases de las velocidades	T^*Q de fases de los momentos
Dimensión	$\dim TQ = 2n$	$\dim T^*Q = 2n$
Coordenadas	n posiciones q_j n velocidades $\dot{q}_j$	n posiciones q_j n momentos p_j

(ii) Propiedades dinámicas

Formalismo	Lagrangiano	Hamiltoniano
Función principal	Lagrangiano L $L : TQ \to \mathbb{R}$ $L = L(q, \dot{q})$	Hamiltoniano H $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ $H = H(q, p)$
Caso dependiente del tiempo	$L : TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $L = L(q, \dot{q}, t)$	$H : T^*Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $H = H(q, p, t)$
Ecuaciones del movimiento	Ecuaciones de Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$	Ecuaciones de Hamilton $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j},\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial p_j}$
Características de las Ecuaciones	n Ec. Dif. de 2do orden	$2\,n$ Ec. Dif. de 1er orden

1.5 Estudio de varios casos particulares

Partícula libre

En este caso el potencial es nulo, esto es $V = 0$, y el Lagrangiano L es simplemente el término cinético. Utilizando coordenadas cartesianas x, y, z,

$$L = T = \tfrac{1}{2}\, m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\,,$$

y los tres momentos, p_x, p_y y p_z, son

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m v_x\,, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m v_y\,, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m v_z\,.$$

El Hamiltoniano es simplemente el término cinético reescrito en el lenguaje de los momentos

$$H = \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)\,.$$

Las seis ecuaciones de Hamilton

$$\frac{d}{dt}\,x_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_i = -\,\frac{\partial H}{\partial x_i}\,,$$

quedan de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt}\,x_i = \frac{p_i}{m}\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_i = 0\,,$$

donde hemos utilizado la notación $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Partícula puntual de masa m sometida a fuerzas que derivan de un potencial.

En este caso el número n de grados de libertad es $n = 3$. Como coordenadas generalizadas es pueden tomar las coordenadas cartesianas x, y, z. La Energía potencial es $V = V(x, y, z)$ y la Energía cinética $T = (1/2)m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. El Lagrangiano viene dado por

$$L = T = \tfrac{1}{2}\,m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - V(x, y, z)\,,$$

y las tres momentos p_x, p_y y p_z son

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = m v_x\,, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial v_y} = m v_y\,, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial v_z} = m v_z\,,$$

y las seis ecuaciones de Hamilton

$$\frac{d}{dt}\,x_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_i = -\,\frac{\partial H}{\partial x_i}\,,$$

conducen a

$$\frac{d}{dt}\,x_i = \frac{p_i}{m}\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_i = -\,\frac{\partial V}{\partial x_i}\,.$$

donde hemos utilizado la notación $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Oscilador armónico uni-dimensional.

En este caso el número n de grados de libertad es simplemente $n = 1$. Como única coordenada generalizada se puede tomar $q = x$. La Energía potencial es $V = (1/2)kx^2$ (k es una constante) y la Energía cinética $T = (1/2)mv_x^2$. Por consiguiente, el Lagrangiano es

$$L = \tfrac{1}{2}mv_x^2 - \tfrac{1}{2}kx^2\,,$$

de tal forma que el momento p_x viene dado por

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = m v_x\,.$$

El Hamiltoniano H viene dado por

$$H = \frac{1}{2m}\, p_x^2 + \tfrac{1}{2} k x^2 \,,$$

de tal forma que las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{d}{dt}\, x = \frac{\partial H}{\partial p_x} \,, \quad \frac{d}{dt}\, p_x = -\, \frac{\partial H}{\partial x} \,,$$

resultan las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt}\, x = \frac{p_x}{m} \,, \quad \frac{d}{dt}\, p_x = -\, kx \,.$$

Péndulo simple.

El péndulo se mueve en un plano vertical pero, como hay una ligadura, la partícula de masa m se mueve a lo largo de una circunferencia de radio igual a la longitud constante de la varilla; por consiguiente se trata de un sistema uni-dimensional y el número n de grados de libertad es simplemente $n = 1$. Como coordenadas generalizada se puede tomar el ángulo $q = \theta$ que forma la varilla con la vertical. Si denotamos por L la longitud de la varilla entonces la Energía potencial es $V = mgL(1 - \cos\theta)$ y la Energía cinética $T = (1/2)mL^2\dot{\theta}^2$. Por consiguiente, el Lagrangiano es

$$\mathbb{L} = \tfrac{1}{2} m L^2 v_\theta^2 - mgL(1 - \cos\theta) \,,$$

de tal forma que el momento p_θ viene dado por

$$p_\theta = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial v_\theta} = mL^2 v_\theta \,,$$

El Hamiltoniano H viene dado por

$$H = \frac{1}{2mL^2}\, p_\theta^2 + mgL(1 - \cos\theta) \,,$$

y las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{d}{dt}\, \theta = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \,, \quad \frac{d}{dt}\, p_\theta = -\, \frac{\partial H}{\partial \theta} \,,$$

conducen a

$$\frac{d}{dt}\, \theta = \frac{p_\theta}{mL^2} \,, \quad \frac{d}{dt}\, p_\theta = -mgL \operatorname{sen}\theta \,.$$

Oscilador armónico bi-dimensional.

En este caso el número n de grados de libertad es $n = 2$. Como coordenadas generalizadas es pueden tomar las coordenadas cartesianas $q_1 = x, q_2 = y$. La Energía potencial es $V = (1/2)(k_1x^2 + k_2y^2)$ (k_1 y k_2 son constantes) y la Energía cinética $T = (1/2)m(v_x^2 + v_y^2)$. Por consiguiente, el Lagrangiano es

$$L = \tfrac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) - \tfrac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2)\,.$$

El Hamiltoniano H viene dado por

$$H = \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2) + \tfrac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2)\,.$$

y las cuatro ecuaciones de Hamilton

$$\frac{d}{dt}\,x = \frac{\partial H}{\partial p_x}\,, \quad \frac{d}{dt}\,y = \frac{\partial H}{\partial p_y}\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_x = -\,\frac{\partial H}{\partial x}\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_y = -\,\frac{\partial H}{\partial y}\,,$$

conducen a

$$\frac{d}{dt}\,x = \frac{p_x}{m}\,, \quad \frac{d}{dt}\,y = \frac{p_y}{m}\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_x = -\,k_1x\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_y = -\,k_2y\,.$$

Partícula puntual de masa m moviéndose en el plano bajo una fuerza que depende de la distancia r al origen.

En este caso el número n de grados de libertad es $n = 2$. Como coordenadas generalizadas es pueden tomar las coordenadas polares $q_1 = r$, $q_2 = \theta$. La Energía potencial es $V = kV(r)$ (k es una constante) y la Energía cinética $T = (1/2)m(v_r^2 + r^2v_\theta^2)$. Por consiguiente, el Lagrangiano es

$$L = \tfrac{1}{2}m(v_r^2 + r^2v_\theta^2) - kV(r)\,,$$

y los dos momentos, p_r y p_ϕ, vienen dados por

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial v_r} = mv_r\,, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial v_\theta} = mr^2v_\theta\,.$$

El Hamiltoniano H viene dado por

$$H(r, \phi, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + k\,V(r)\,,$$

y las cuatro ecuaciones de Hamilton

$$\frac{d}{dt}\,r = \frac{\partial H}{\partial p_r}\,, \quad \frac{d}{dt}\,\theta = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_r = -\,\frac{\partial H}{\partial r}\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_\theta = -\,\frac{\partial H}{\partial \theta}\,,$$

conducen a

$$\frac{d}{dt}\,r = \frac{p_r}{m}\,, \quad \frac{d}{dt}\,\theta = \frac{p_\theta}{mr^2}\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \,k\frac{dV}{dr}\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_\theta = 0\,.$$

Péndulo esférico.

En el caso de un péndulo esférico el movimiento está confinado a una superficie esférica de radio L; por consiguiente se trata de un sistema bi-dimensional y el número n de grados de libertad es $n = 2$.

Recordemos, en primer lugar, que las ecuaciones que relacionan las coordenadas Cartesianas (x, y, z) con las coordenadas esféricas (L, θ, ϕ) son las siguientes

$$x = L \operatorname{sen}\theta \cos\phi\,, \quad y = L \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\,, \quad z = -L\cos\theta\,.$$

La energía cinética T y el potencial V vienen dados por

$$T = \tfrac{1}{2} mL^2 (v_\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, v_\phi^2)\,, \quad V = mgL(1 - \cos\theta)\,,$$

de tal forma que $V = 0$ en la posición de equilibrio $(x, y, z) = (0, 0, -L)$. El Lagrangiano viene dado por

$$\mathbb{L} = \tfrac{1}{2} mL^2 (v_\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, v_\phi^2) - mgL(1 - \cos\theta)\,.$$

y los dos momentos, p_θ y p_ϕ, vienen dados

$$p_\theta = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial v_\theta} = mL^2\, v_\theta\,, \quad p_\phi = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial v_\phi} = mL^2 \operatorname{sen}^2\theta\, v_\phi\,.$$

El Hamiltoniano del sistema H viene dado por

$$H(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2mL^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\right) + mgL(1 - \cos\theta)\,,$$

y las cuatro ecuaciones de Hamilton

$$\frac{d}{dt}\theta = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}\,, \quad \frac{d}{dt}\phi = \frac{\partial H}{\partial p_\phi}\,, \quad \frac{d}{dt}p_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}\,, \quad \frac{d}{dt}p_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi}\,,$$

conducen a

$$\frac{d}{dt}\theta = \frac{p_\theta}{mL^2}\,, \quad \frac{d}{dt}\phi = \frac{p_\phi}{mL^2 \sin^2\theta}\,, \quad \frac{d}{dt}p_\theta = \frac{p_\phi \cos\theta}{mL^2 \sin^3\theta} - mgL \operatorname{sen}\theta\,, \quad \frac{d}{dt}p_\phi = 0\,.$$

Partícula puntual de masa m moviéndose en el espacio bajo una fuerza que depende de la distancia r al origen.

En este caso el número n de grados de libertad es $n = 3$. Como coordenadas generalizadas se pueden tomar las coordenadas polares esféricas $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \psi$ (ψ es la colatitud). las ecuaciones que relacionan las coordenadas Cartesianas (x, y, z) con las coordenadas esféricas, (r, θ, ψ) son las siguientes

$$x = r \operatorname{sen}\psi \cos\theta\,, \quad y = r \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta\,, \quad z = r\cos\psi\,,$$

de tal forma que la energía cinética T queda de la siguiente forma

$$T = \tfrac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \tfrac{1}{2}m(v_r^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\psi\, v_\theta^2 + r^2 v_\psi^2)\,.$$

El potencial V es central y solo depende de la coordenada radial, esto es $V = V(r)$. Por consiguiente el Lagrangiano L del sistema es

$$L = \tfrac{1}{2}m(v_r^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\psi\, v_\theta^2 + r^2 v_\psi^2) - kV(r)\,, \quad (k \text{ es una constante}),$$

y los momentos, p_r, p_θ y p_ψ, vienen dados por

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial v_r} = m v_r\,, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial v_\theta} = m r^2 \operatorname{sen}^2\psi v_\theta\,, \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial v_\psi} = m r^2 v_\psi\,.$$

El Hamiltoniano H es

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r^2} + \frac{p_\theta^2}{r^2 \operatorname{sen}^2\psi}\right) + k\,V(r)\,.$$

El primer grupo de Ec. de Hamilton

$$\frac{d}{dt}\,r = \frac{\partial H}{\partial p_r}\,, \quad \frac{d}{dt}\,\theta = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}\,, \quad \frac{d}{dt}\,\psi = \frac{\partial H}{\partial p_\psi}\,,$$

queda de la forma

$$\frac{d}{dt}\,r = \frac{p_r}{m}\,, \quad \frac{d}{dt}\,\theta = \frac{p_\theta}{m r^2 \sin^2\theta}\,, \quad \frac{d}{dt}\,\psi = \frac{p_\phi}{m r^2}\,.$$

y el segundo grupo de Ec. de Hamilton

$$\frac{d}{dt}\,p_r = -\frac{\partial H}{\partial r}\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \psi}\,,$$

conduce a las ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\,p_r = \frac{p_\psi^2}{m r^3} + \frac{p_\theta^2}{m r^3 \operatorname{sen}^2\psi} - kV'(r)\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_\theta = 0\,, \quad \frac{d}{dt}\,p_\phi = -\frac{p_\theta^2 \cos\psi}{m r^2 \operatorname{sen}^3\psi}\,.$$

Partícula en un campo E.M.

Consideremos una partícula de masa m y carga eléctrica q moviéndose en una cierta región del espacio bajo la acción de un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$.

En este caso el número n de grados de libertad es $n = 3$ (no hay ligaduras y el espacio de configuración Q es el espacio Euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$) y resulta adecuado utilizar como coordenadas generalizadas las coordenadas Cartesianas $q_1 = x$, $q_2 = y$, y $q_3 = z$. Recordemos que la fuerza de Lorentz $\vec{F}_{em}$, que es una fuerza que depende de la velocidad $\vec{v}$, se puede expresar como una fuerza que proviene de un potencial U dado por

$$U = q\Big(\Phi\, -\, \frac{1}{c}\,\vec{v}\cdot\vec{A}\Big)$$

que depende de la velocidad. Como consecuencia de ello el sistema partícula con masa m y carga q moviéndose en una región del espacio bajo la acción de una fuerza $\vec{F}_{em}$ generada por un campo electromagnético $(\vec{E}, \vec{B})$ es un sistema Lagrangiano.

El Lagrangiano es

$$L = T - U = \tfrac{1}{2}\, m\, (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - q\Big(\Phi \, - \, \frac{1}{c}\, \vec{v} \cdot \vec{A}\Big)\,,$$

de tal forma que los tres momentos p_x, p_y, y p_z, vienen dados por

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = m v_x + \frac{q}{c}\, A_x\,, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial v_y} = m v_y + \frac{q}{c}\, A_y\,, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial v_z} = m v_z + \frac{q}{c}\, A_z\,.$$

Utilizando estas expresiones, podemos despejar las velocidades en función de los momentos

$$v_x = \frac{1}{m}\Big(p_x - \frac{q}{c}\, A_x\Big)\,, \quad v_y = \frac{1}{m}\Big(p_y - \frac{q}{c}\, A_y\Big)\,, \quad v_z = \frac{1}{m}\Big(p_z - \frac{q}{c}\, A_z\Big)\,,$$

y construir el Hamiltoniano que resulta ser

$$H = \frac{1}{2m}\Big[\Big(p_x - \frac{q}{c}\, A_x\Big)^2 + \Big(p_x - \frac{q}{c}\, A_x\Big)^2 + \Big(p_x - \frac{q}{c}\, A_x\Big)^2\Big] + q\,\Phi\,.$$

Las Ec. de Hamilton, que son las siguientes seis ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\, x_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}\,, \quad \frac{d}{dt}\, p_j = -\,\frac{\partial H}{\partial x_j}\,, \quad j = 1, 2, 3,$$

resultan

$$\frac{d}{dt}\, x_j = \frac{1}{m}\Big(p_j - \frac{q}{c}\, A_j\Big)\,,$$

$$\frac{d}{dt}\, p_j = \frac{q}{m\, c}\, \sum_{i=1}^{3} \Big(p_i - \frac{q}{c}\, A_i\Big)\, \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - q\, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\,.$$

Capítulo 2

Formalismo Hamiltoniano II : Paréntesis de Poisson

1. Paréntesis de Poisson
2. Paréntesis de Poisson fundamentales y ecuaciones de Hamilton
3. Paréntesis de Poisson y constantes del movimiento
4. Estudio de tres casos particulares

2.1 Paréntesis de Poisson

2.1.1 Evolución temporal de una variable dinámica

La derivada con respecto al tiempo t de una variable dinámica R vendrá dada por

$$\frac{dR}{dt} = \sum_i \Big(\frac{\partial R}{\partial q_i}\, \dot{q}_i + \frac{\partial R}{\partial p_i}\, \dot{p}_i \Big) + \frac{\partial F}{\partial t}\,,$$

Recordando que los valores de $\dot{q}_i$ y $\dot{p}_i$ vienen dados por las ecuaciones de Hamilton obtenemos

$$\frac{dR}{dt} = \sum_i \Big(\frac{\partial R}{\partial q_i}\, \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial R}{\partial p_i}\, \frac{\partial H}{\partial q_i} \Big) + \frac{\partial R}{\partial t}\,.$$

La expresión del sumatorio se denomina Paréntesis de Poisson de la función R con el Hamiltoniano H y se denota por $\{R, H\}$

$$\{R, H\} = \sum_i \Big(\frac{\partial R}{\partial q_i}\, \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial R}{\partial p_i}\, \frac{\partial H}{\partial q_i} \Big)\,.$$

La derivada con respecto al tiempo t queda pues de la siguiente forma

$$\frac{dR}{dt} = \{R, H\} + \frac{\partial R}{\partial t}\,.$$

En el caso particular de que R no dependa explícitamente del tiempo, la expresión anterior se reduce a

$$\frac{dR}{dt} = \{R, H\}\,.$$

En consecuencia, una forma alternativa de calcular la evolución temporal de una variable dinámica es calcular su P. de P. con el Hamiltoniano.

2.1.2 Paréntesis de Poisson : Definición y propiedades

Sean R y S dos variables dinámicas. Se denomina "Paréntesis de Poisson" de R con S y se denota por $\{R, S\}$ a la función definida de la siguiente forma

$$\{R, S\} = \sum_i \left(\frac{\partial R}{\partial q_i}\frac{\partial S}{\partial p_i} - \frac{\partial R}{\partial p_i}\frac{\partial S}{\partial q_i} \right)$$

Por consiguiente el Paréntesis de Poisson de dos variables dinámicas (funciones) es una nueva variable dinámica (función). Si denotamos por $\mathcal{F}(T^*Q)$ el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en el espacio de fases entonces el Paréntesis de Poisson se puede considerar como una aplicación definida de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcccl} \{\,\cdot\,,\,\cdot\,\} & : & \mathcal{F}(T^*Q) \times \mathcal{F}(T^*Q) & \to & \mathcal{F}(T^*Q) \\ & & (R\,,\,S) & \to & \{R, S\} \end{array}$$

En este sentido la aplicación $(R, S) \mapsto \{R, S\}$ se puede interpretar como un producto entre dos funciones. Se trata de un producto algo peculiar ya que depende de las derivadas de las funciones y, por supuesto, es totalmente distinto al producto ordinario de dos funciones $(R, S) \mapsto RS$.

La aplicación Paréntesis de Poisson posee las siguientes propiedades :

(i) Linealidad

$$\begin{array}{rcl} \{c_1R_1 + c_2R_2, S\} & = & c_1\{R_1, S\} + c_2\{R_2, S\} \\ \{R, c_1S_1 + c_2S_2\} & = & c_1\{R, S_1\} + c_2\{R, S_2\} \end{array}$$

(ii) Antisimetría

$$\{S, R\} = -\,\{R, S\}$$

(iii) Identidad de Jacobi

$$\{R, \{S, T\}\} + \{T, \{R, S\}\} + \{S, \{T, R\}\} = 0$$

(iv) Regla de Leibniz

$$\{R, S\,T\} = \{R, S\}\,T + S\,\{R, T\}$$

Un espacio vectorial A en el que ha definido un producto no asociativo $*$ que asocia a cada par de vectores $a, b \in A$ un nuevo vector $(a, b) \mapsto a * b \in A$, que satisface las tres primeras propiedades, se dice que posee de una estructura de álgebra de Lie. La costumbre es denotar este producto de la forma $[a, b]$ en lugar de $a * b$. Por consiguiente en un álgebra de Lie se cumple

(i) Linealidad

$$\begin{aligned} [\,k_1 a_1 + k_2 a_2, b\,] &= k_1[\,a_1, b\,] + k_2[\,a_2, b\,] \\ [\,a, k_1 b_1 + k_2 b_2\,] &= k_1[\,a, b_1\,] + k_2[\,a, b_2\,] \end{aligned}$$

(ii) Antisimetría

$$[\,b, a\,] = -\,[\,a, b\,]$$

(iii) Identidad de Jacobi

$$[\,a, [\,b, c\,]\,] + [\,c, [\,a, b\,]\,] + [\,b, [\,c, a\,]\,] = 0$$

Por consiguiente la definición de paréntesis de Poisson confiere al conjunto de variables dinámicas (funciones en el espacio de fases) una estructura de álgebra de Lie

> *El conjunto de las variable dinámicas $\mathcal{F}(T^*Q)$ [$\mathcal{F}(T^*Q \times \mathbb{R})$ en el caso dependiente del tiempo] tiene estructura de álgebra de Lie.*

La propiedad (iv) recuerda claramente a la regla de Leibniz que caracteriza la derivada de un producto

$$\frac{d}{dx}(fg) = \Big(\frac{df}{dx}\Big)g + f\Big(\frac{dg}{dx}\Big)\,.$$

Un álgebra de Lie en la que también se cumple la propiedad (iv) con respecto a un producto normal asociativo, $(f, g) \mapsto fg$, se denomina "álgera de Poisson". Por consiguiente la definición de paréntesis de Poisson confiere al conjunto de variables dinámicas (funciones en el espacio de fases) una estructura que no sólo es álgebra de Lie sino también es álgera de Poisson.

> *El conjunto de las variable dinámicas $\mathcal{F}(T^*Q)$ [$\mathcal{F}(T^*Q \times \mathbb{R})$ en el caso dependiente del tiempo] tiene estructura de álgebra de Poisson.*

2.2 Paréntesis de Poisson fundamentales y Ecs. de Hamilton

2.2.1 Paréntesis de Poisson fundamentales

Un caso interesante de paréntesis de Poisson $\{R, S\}$ es el caso particular en el que las funciones R y S sean precisamente las coordenadas q_r o los momentos p_s. Mediante cálculo directo obtenemos

$$\{q_r, q_s\} \;=\; \sum_i \Big(\frac{\partial q_r}{\partial q_i}\,\frac{\partial q_s}{\partial p_i} - \frac{\partial q_r}{\partial p_i}\,\frac{\partial q_s}{\partial q_i}\Big) = 0\,,$$

$$\{p_r, p_s\} = \sum_i \Big(\frac{\partial p_r}{\partial q_s} \frac{\partial p_s}{\partial p_i} - \frac{\partial q_r}{\partial p_i} \frac{\partial p_s}{\partial q_i} \Big) = 0 \,,$$

así como

$$\{q_r, p_s\} = \sum_i \Big(\frac{\partial q_r}{\partial q_i} \frac{\partial p_s}{\partial p_i} - \frac{\partial q_r}{\partial p_i} \frac{\partial p_s}{\partial q_i} \Big) = \delta_{rs} \,,$$

donde δ_{rs} es la delta de Kronecker. En resumen, hemos obtenido

$$\{q_r, q_s\} = 0 \,, \quad \{p_r, p_s\} = 0 \,, \quad \{q_r, p_s\} = \delta_{rs}$$

que se denominan paréntesis de Poisson fundamentales.

A pesar de su aparente simplicidad, se verá posteriormente que estos paréntesis de Poisson fundamentales desempeñan un papel importante en el formalismo Hamiltoniano.

2.2.2 Ecs. de Hamilton y Paréntesis de Poisson

Los paréntesis de Poisson de las funciones q_r y p_r con el Hamiltoniano H vienen dados por

$$\begin{aligned} \{q_r, H\} &= \sum_i \Big(\frac{\partial q_r}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial q_r}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \Big) = \frac{\partial H}{\partial p_r} \\ \{p_r, H\} &= \sum_i \Big(\frac{\partial p_r}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial p_r}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \Big) = - \frac{\partial H}{\partial p_r} \end{aligned}$$

Por consiguiente las ecuaciones de Hamilton, que son las ecuaciones de evolución de un sistema Hamiltoniano, se pueden presentar en función de los paréntesis de Poisson

$$(i) \quad \frac{d}{dt} q_i = \{q_i, H\} \,, \qquad (ii) \quad \frac{d}{dt} q_i = \{p_i, H\} \,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \,.$$

2.3 Paréntesis de Poisson y constantes del movimiento

Hemos visto que los paréntesis de Poisson están relacionados con las propiedades fundamentales de un sistema Hamiltoniano. En esta sección estudiaremos las propiedades de las constantes del movimiento utilizando lel formalismo de los paréntesis de Poisson.

A continuación demostraremos, utilizando las propiedades de los paréntesis de Poisson, las dos propiedades siguientes

Proposición 3 *(i) Toda combinación lineal de constantes del movimiento es una constante del movimiento. (ii) El producto de dos constantes del movimiento es una constante del movimiento*

Supongamos que R_1 y R_2 son dos constantes del movimiento para un cierto Hamiltoniano H. Entonces se cumple

$$\frac{d}{dt} R_1 = \{R_1, H\} + \frac{\partial R_1}{\partial t} = 0 \,, \quad \frac{d}{dt} R_2 = \{R_2, H\} + \frac{\partial R_2}{\partial t} = 0 \,.$$

(i) Consideremos la combinación lineal $R = c_1 R_1 + c_2 R_2$. Entonces teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \{R, H\} &= \{c_1 R_1 + c_2 R_2, H\} = c_1\{R_1, H\} + c_2\{R_2, H\}\,, \\ \frac{\partial}{\partial t} R &= \frac{\partial}{\partial t}(c_1 R_1 + c_2 R_2) = c_1 \frac{\partial R_1}{\partial t} + c_2 \frac{\partial R_2}{\partial t}\,, \end{aligned}$$

se deduce que

$$\begin{aligned} \{R, H\} + \frac{\partial}{\partial t} R &= \{c_1 R_1 + c_2 R_2, H\} + \frac{\partial}{\partial t}(c_1 R_1 + c_2 R_2) \\ &= c_1\Big(\{R_1, H\} + \frac{\partial R_1}{\partial t}\Big) + c_2\Big(\{R_2, H\} + \frac{\partial R_2}{\partial t}\Big) = 0\,. \end{aligned}$$

(ii) Consideremos ahora el producto $R_1 R_2$. Entonces teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \{R_1 R_2, H\} &= \{R_1, H\} R_2 + R_1 \{R_2, H\} \\ \frac{\partial}{\partial t}(R_1 R_2) &= \frac{\partial R_1}{\partial t} R_2 + R_1 \frac{\partial R_2}{\partial t} \end{aligned}$$

se deduce que

$$\begin{aligned} \{R_1 R_2, H\} + \frac{\partial}{\partial t}(R_1 R_2) &= \{R_1, H\} R_2 + R_1 \{R_2, H\} + \frac{\partial R_1}{\partial t} R_2 + R_1 \frac{\partial R_2}{\partial t} \\ &= \Big(\{R_1, H\} + \frac{\partial R_1}{\partial t}\Big) R_2 + R_1 \Big(\{R_2, H\} + \frac{\partial R_2}{\partial t}\Big) = 0\,. \end{aligned}$$

Estas dos propiedades son bastante sencillas y son simple aplicación de las propiedades básicas de los paréntesis de Poisson. La siguiente propiedad, que es algo más avanzada, desempeñará en lo que sigue un papel importante.

Proposición 4 *Consideremos un sistema Hamiltoniano. Entonces la derivada con respecto al tiempo del paréntesis de Poisson de dos variables dinámicas R y S viene dada por*

$$\frac{d}{dt}\{R, S\} = \Big\{\frac{d}{dt} R, S\Big\} + \Big\{R, \frac{d}{dt} S\Big\}\,.$$

Recordemos, en primer lugar, que si la evolución temporal es Hamiltoniana entonces el cambio que sufre una variable dinámica F viene dada por

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Consideremos el caso particular en el que la función F es una función que procede del paréntesis de Poisson de dos funciones R y S

$$F \quad \mapsto \quad \{R, S\}$$

Entonces obtenemos

$$\frac{d}{dt}\{R, S\} = \{\{R, S\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{R, S\}\,.$$

Calcularemos por separado cada uno de los dos sumandos de la derecha.

(i) Cálculo del Paréntesis de Poisson $\{\{R,S\},H\}$

Dado que se trata de una expresión que envuelve a tres funciones, R, S y H, parece adecuado utilizar la identidad de Jacobi

$$\{\{R,S\},H\}+\{\{H,R\},S\}+\{\{S,H\},R\}=0\,,$$

de lo que se deduce que

$$\{\{R,S\},H\}=\{\{R,H\},S\}+\{R,\{S,H\}\}\,.$$

(ii) Cálculo de la derivada $\partial/\partial t\{R,S\}$

Este segundo sumando se puede calcular por cálculo directo (la derivada de una suma es la suma de las derivadas, etc)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\{R,S\} &= \frac{\partial}{\partial t}\sum_i\Big(\frac{\partial R}{\partial q_i}\frac{\partial S}{\partial p_i}-\frac{\partial R}{\partial p_i}\frac{\partial S}{\partial q_i}\Big)\\ &= \sum_i\Big(\frac{\partial^2 R}{\partial t\,\partial q_i}\frac{\partial S}{\partial p_i}+\frac{\partial R}{\partial q_i}\frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial p_i}-\frac{\partial^2 R}{\partial t\,\partial p_i}\frac{\partial S}{\partial q_i}-\frac{\partial R}{\partial p_i}\frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial q_i}\Big)\,,\end{aligned}$$

que, si se agrupan los términos adecuadamente, se puede reescribir de la forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\{R,S\} &= \sum_i\Big(\frac{\partial^2 R}{\partial t\,\partial q_i}\frac{\partial S}{\partial p_i}-\frac{\partial^2 R}{\partial t\,\partial p_i}\frac{\partial S}{\partial q_i}\Big)+\sum_i\Big(\frac{\partial R}{\partial q_i}\frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial p_i}-\frac{\partial R}{\partial p_i}\frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial q_i}\Big)\\ &= \Big\{\frac{\partial}{\partial t}R,S\Big\}+\Big\{R,\frac{\partial}{\partial t}S\Big\}\,.\end{aligned}$$

Sumando las dos contribuciones, (i) y (ii), obtenemos

$$\frac{d}{dt}\{R,S\}=\{\{R,H\},S\}+\{R,\{S,H\}\}+\Big\{\frac{\partial R}{\partial t},S\Big\}+\Big\{R,\frac{\partial S}{\partial t}\Big\}\,,$$

que se puede reescribir de la forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{R,S\} &= \Big[\{\{R,H\},S\}+\Big\{\frac{\partial R}{\partial t},S\Big\}\Big]+\Big[\{R,\{S,H\}\}+\Big\{R,\frac{\partial S}{\partial t}\Big\}\Big]\\ &= \Big\{\frac{dR}{dt},S\Big\}+\Big\{R,\frac{dS}{dt}\Big\}\,.\end{aligned}$$

∎

Una consecuencia de esta propiedad es lo siguiente.

Teorema 1 *El paréntesis de Poisson de dos constantes del movimiento es una constante del movimiento.*

Sean R y S dos constantes del movimiento

$$\frac{d}{dt}\,R = 0\,, \quad \frac{d}{dt}\,S = 0\,.$$

Entonces

$$\frac{d}{dt}\{R,S\} = \left\{\frac{d}{dt}R, S\right\} + \left\{R, \frac{d}{dt}S\right\} = 0\,.$$

Esta propiedad puede ser utilizada como método para construir o generar nuevas constantes del movimiento. Sin embargo conviene resaltar que este procedimiento no garantiza que la nueva constante del movimiento sea independiente de las constantes previamente conocidas.

2.4 Estudio de tres casos particulares

2.4.1 Oscilador armónico bidimensional

Consideremos el Hamiltoniano del oscilador armónico bidimensional

$$H = \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2) + \tfrac{1}{2}k(x^2 + y^2)\,.$$

Las siguientes tres funciones

$$I_1 = \tfrac{1}{2}\,p_x^2 + \tfrac{1}{2}kmx^2\,, \quad I_2 = \tfrac{1}{2}\,p_y^2 + \tfrac{1}{2}kmy^2\,, \quad J = xp_y - yp_x\,,$$

tienen paréntesis de Poisson nulos con el Hamiltoniano

$$\{I_1, H\} = 0\,, \quad \{I_2, H\} = 0\,, \quad \{J, H\} = 0\,,$$

lo que significa que son constantes del movimiento. Se trata, como se ve fácilmente, de las dos energías uni-dimensionales, $I_1 = E_x$ e $I_2 = E_y$, y el momento angular.

El paréntesis de Poisson de J con I_1 determina una nueva función

$$\{J, I_1\} = p_x p_y + kmxy\,,$$

que, de acuerdo con la proposición anterior, debe ser una constante del movimiento. En efecto se comprueba que

$$\{p_x p_y + kmxy\,,\, H\} = 0\,.$$

2.4.2 Problema de Kepler bidimensional

Consideremos el Hamiltoniano H_K del problema de Kepler bi-dimensional

$$H_K = \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2) - \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,, \quad k > 0\,.$$

Las siguientes tres funciones

$$J = xp_y - yp_x \,,$$

$$A_x = (xp_y - yp_x)p_y - \frac{mkx}{\sqrt{x^2+y^2}} \,, \quad A_y = (yp_x - xp_y)p_x - \frac{mky}{\sqrt{x^2+y^2}} \,,$$

conmutan, en el sentido de Poisson, con el Hamiltoniano

$$\{J, H\} = 0 \,, \quad \{A_x, H\} = 0 \,, \quad \{A_y, H\} = 0 \,.$$

Representan el momento angular y las dos componentes del vector de Laplace-Hamilton.

Si calculamos los paréntesis de Poisson de estas tres funciones entre sí, obtendremos nuevas funciones que deben ser también constantes del movimiento. El resultado es que el paréntesis de Poisson de J con una de las componentes de A nos da la otra componente de A

$$\{J, A_x\} = A_y \,, \quad \{J, A_y\} = -A_x \,,$$

y el paréntesis de Poisson de A_y con A_x nos da una función que resulta ser el producto de J por el Hamiltoniano

$$\{A_y, A_x\} = 2mJH_K \,.$$

2.4.3 Potencial central

Consideremos el Hamiltoniano H de una artícula puntual de masa m moviéndose bajo una fuerza que depende de la distancia r al origen

$$H = (\frac{1}{2m})\Big(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\Big) + k\,V(r) \,, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \,.$$

En este caso las tres componentes J_i, $i = x, y, z$, del momento angular

$$J_x = yp_z - zp_y \,, \quad J_y = zp_x - xp_z \,, \quad J_z = xp_y - yp_x \,,$$

tienen paréntesis de Poisson nulos con el Hamiltoniano

$$\{J_x, H\} = 0 \,, \quad \{J_y, H\} = 0 \,, \quad \{J_z, H\} = 0 \,,$$

lo que significa que son constantes del movimiento. Se comprueba que los P. de P. de estas tres funciones vienen dados por

$$\{J_x, J_y\} = J_z \,, \quad \{J_z, J_x\} = J_y \,, \quad \{J_y, J_z\} = J_x \,.$$

Capítulo 3

Ecs. de Hamilton y formalismo variacional

1. Introducción
2. Principio de Hamilton modificado
3. Comentarios

3.1 Introducción

Hemos visto que las ecuaciones de Lagrange se pueden obtener utilizando métodos variacionales. Más concretamente, probamos que las ecuaciones de Lagrange son las ecuaciones de Euler asociadas al principio de Hamilton

> *Las trayectorias*
> $$q_i = q_i(t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
> *seguidas por un sistema Lagrangiano entre los tiempos t_1 y t_2 son aquellas que hacen que la integral*
> $$S_L[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L[\,q(t), \dot{q}(t), t\,]\,dt$$
> *alcance un valor extremal.*

Hemos obtenido las ecuaciones de Hamilton utilizando la transformación de Legendre.

Sería altamente positivo poder probar que las ecuaciones Hamilton son también deducibles como consecuencia de un principio variacional.

3.2 Principio de Hamilton modificado

Denotemos por $\mathcal{L}$ la función que se obtiene considerando el Lagrangiano L como función de las $4n$ variables $(q_i, \dot{q}_i, p_i, \dot{p}_i)$ (caso independiente del tiempo) ó las $4n+1$ variables $(q_i, \dot{q}_i, p_i, \dot{p}_i, t)$ (caso dependiente del tiempo)

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, p_i, \dot{p}_i, t) = \sum_i \dot{q}_i \, p_i - H(q, p, t)$$

En este caso, el funcional S se puede reescribir de la siguiente forma

$$S_{\mathcal{L}}[q_i(t), p_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \Big[\sum_i \dot{q}_i \, p_i - H(q, p, t) \Big] \, dt$$

La condición de que S, escrito de esta nueva forma, alcance un valor extremal se denomina *Principio de Hamilton modificado.*

Las trayectorias

$$q_i = q_i(t) \, , \; p_i = p_i(t) \, , \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

seguidas por un sistema Hamiltoniano entre los tiempos t_1 y t_2 son aquellas que hacen que la integral

$$S_{\mathcal{L}}[q_i(t), p_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \Big[\sum_i \dot{q}_i \, p_i - H(q, p, t) \Big] \, dt$$

alcance un valor extremal.

El problema consiste en la obtención de las ecuaciones que determinan las $2n$ funciones $q_i(t)$, $p_i(t)$, que, cumpliendo ciertas condiciones de contorno

$$(q_k(t_1), p_k(t_1)) = (\bar{q}_{k1}, \bar{p}_{k1}), \quad (q_k(t_2), p_k(t_2)) = (\bar{q}_{k2}, \bar{p}_{k2}), \qquad k = 1, \ldots, n$$

hagan extremal la integral $S_{\mathcal{L}}$.

Debe quedar bien claro que estamos considerando las $2n$ funciones $(q_i(t), p_i(t))$ como $2n$ funciones independientes; por consiguiente se trata de un problema variacional con (i) una variable independiente t, (ii) $2n$ funciones incógnita $q_i(t)$ y $p_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, y (iii) las correspondientes $2n$ funciones derivadas $\dot{q}_i(t)$ y $\dot{p}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Recordemos que el método de Euler consiste básicamente en lo siguiente. En primer lugar se introduce un parámetro α que toma valores en un cierto intervalo $\alpha \in I_R$, $I_R = [-R, R]$, y una familia de funciones $q_i(t, \alpha), p_i(t, \alpha)$, dependientes de α que satisfacen las condiciones de contorno para todos lo valores de α. Entonces para pequeños valores de α es posible utilizar la siguiente representación de estas funciones

$$\begin{aligned} q_i(t, \alpha) &= q_i(t) + \alpha \, \eta_i(t) \, , \\ p_i(t, \alpha) &= p_i(t) + \alpha \, \widetilde{\eta}_i(t) \, , \end{aligned}$$

donde las funciones $\eta_i(t), \widetilde{\eta}_i(t)$, se denominan variaciones de las $q_i(t), p_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, y satisfacen las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \eta_i(t_1) &= \eta_i(t_2) = 0\,, \\ \widetilde{\eta}_i(t_1) &= \widetilde{\eta}_i(t_2) = 0\,. \end{aligned}$$

La acción del funcional $S_{\mathcal{L}}$ sobre las funciones $q_i(t,\alpha), p_i(t,\alpha)$ queda de la siguiente forma

$$S_{\mathcal{L}}[q_\alpha(t), p_\alpha(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}[\, q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), p_\alpha(t), \dot{p}_\alpha(t), t\,]\, dt\,.$$

Teniendo en cuenta que la integración es con respecto a t, el resultado se puede considerar como una función que depende de α

$$S[\alpha] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}[\, q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), p_\alpha(t), \dot{p}_\alpha(t), t\,]\, dt$$

y la condición de que el funcional $S_{\mathcal{L}}$ alcance un valor estacionario se transforma en que la función $S[\alpha]$ sea independiente de α en primer orden.

La derivada de S con respecto a α vendrá dada por

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \Big) + \sum_i \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_i}\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial \alpha} \Big) \right] dt\,.$$

Realizando una integración por partes, teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} = \eta_i(t)\,, \quad \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} = \widetilde{\eta}_i(t)\,,$$

e incorporando las condiciones de contorno llegamos a

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Big)\eta_i + \sum_i \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_i} \Big)\widetilde{\eta}_i \right] dt\,.$$

Teniendo en cuenta que las derivadas de $\mathcal{L}$ con respecto a q_i, p_i, $\dot{q}_i$, y $\dot{p}_i$ vienen dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i\,, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_i} = 0\,,$$

llegamos finalmente a la siguiente expresión

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \Big(-\frac{\partial H}{\partial q_i} - \dot{p}_i \Big)\eta_i + \sum_i \Big(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big)\widetilde{\eta}_i \right] dt\,.$$

Recordando que las $2n$ variaciones

$$\delta q_i = \eta_i\,, \quad \delta p_i = \widetilde{\eta}_i\,,$$

son funciones arbitrarias, obtenemos que la integral resultante será igual a cero si y solo si se anulan por separado cada uno de los $2n$ coeficientes. Esto conduce a

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} - \dot{p}_i = 0\,, \quad \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0\,, \quad i = 1, , \ldots, n,$$

que, reescritas adecuadamente, resultan ser las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,.$$

En resumen: las Ecuaciones de Hamilton se pueden considerar, al igual que ocurría con las ecuaciones de Lagrange, ecuaciones de tipo variacional. Más concretamente *las Ecuaciones de Hamilton son las ecuaciones de Euler del principio de Hamilton modificado.*

3.3 Comentarios

La independencia entre las funciones $q_i(t)$ y las funciones $p_i(t)$ juega un papel importante en la deducción anterior y constituye una de las diferencias fundamentales entre el formalismo Lagrangiano y el formalismo Hamiltoniano.

Un principio variacional consiste fundamentalmente en la minimización de un funcional de la forma

$$J[y_1, \ldots, y_n] = \int_{t_1}^{t_2} F[\,t, y_i(t), y_i'(t)]\; dt$$

- En el caso Lagrangiano, la función F es el Lagrangiano L, las funciones $y_i(t)$ son las n coordenadas generalizadas $q_i(t)$, y las derivadas $y_i' = dy_i/dt$ son las n velocidades $\dot{q}_i = dq_i/dt$.

- En el caso Hamiltoniano, la función F es la función que hemos denotado por $\mathcal{L}$, las funciones $y_i(t)$ son las $2n$ funciones $q_i(t), p_i(t)$, y las derivadas $y_i'(t)$ son las $2n$ funciones $\dot{q}_i = dq_i/dt, \dot{p}_i = dp_i/dt$.

El hecho de que las ecuaciones de Hamilton sean de 1er orden puede parecer en principio algo sorprendente ya que las ecuaciones de Euler de un problema variacional se supone que deben ser ecuaciones de 2do orden. Lo que ocurre en este caso es que el problema variacional es un problema singular. En efecto, el Hessiano W de las derivadas segundas de la función $\mathcal{L}$ con respecto a $\dot{q}_i$ y $\dot{p}_j$ es nulo

$$\det W = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \dot{q}_j} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \dot{p}_j} \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_i \dot{q}_j} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_i \dot{p}_j} \end{bmatrix} = 0$$

Normalmente los problemas singulares conducen a un sistema de ecuaciones conteniendo no sólo ecuaciones de segundo orden sino también ecuaciones de primer orden. En la práctica lo que se

obtiene es que el número de ecuaciones de segundo orden viene dado por el rango de la matriz y el número de ecuaciones de primer orden por el corango. El punto importante es que el Principio de Hamilton modificado es altamente singular y el resultado es que todas las ecuaciones de Euler asociadas son ecuaciones de primer orden.

- Método 1:
  Ecuaciones de Lagrange + Transformación de Legendre $\Rightarrow$ Ecuaciones de Hamilton
- Método 2:
  Principio de Hamilton modificado $\Rightarrow$ Ecuaciones de Hamilton

Capítulo 4

Formalismo Hamiltoniano III

1. Introducción
2. Formalismo Hamiltoniano utilizando la matriz Ω
3. Teorema del Paréntesis de Poisson

4.1 Introducción

4.2 Formalismo Hamiltoniano utilizando la matriz Ω

4.2.1 Nueva notación

Nuevo sistema de coordenadas

Recordemos, en primer lugar, que el espacio de fases T^*Q es $2n$-dimensional y que por consiguiente son necesarias $2n$ coordenadas para caracterizar la posición de un punto en dicho espacio. Introducimos a continuación un nuevo conjunto de $2n$ coordenadas definido de la siguiente forma

$$\begin{aligned}&\xi_1 = q_1,\ \xi_2 = q_2\,,\ \ldots\,, \xi_n = q_n,\\ &\xi_{n+1} = p_1,\, \xi_{n+2} = p_2,\, \ldots,\, \xi_{2n} = p_n.\end{aligned}$$

En términos dinámicos, el estado de un sistema Hamiltoniano en un cierto instante de tiempo t está completamente especificado dando los valores que toman estas $2n$ coordenadas; en términos geométricos, esto corresponde a fijar la posición de un punto en este espacio $2n$-dimensional.

Tenemos, por consiguiente, dos posibles descripciones:

(i) La descripción tradicional que consiste en n coordenadas q_j (coordenadas generalizadas) y n momentos p_j (momentos conjugados) con un índice j que toma los valores $j = 1, 2, \ldots, n$.

(ii) Este nuevo sistema de $2n$ coordenadas ξ_α con un índice α que toma los valores $\alpha = 1, 2, \ldots, 2n$.

La mayor diferencia entre estas dos descripciones es que en el primer caso (notación tradicional) hay una clara distinción entre el primer subconjunto, que corresponde a las coordenadas en el espacio de configuración Q, y el segundo subconjunto que corresponde a los momentos ('coordenadas verticales' en el espacio de fases). En el segundo caso (notación con letras griegas) las posiciones y los momentos están agrupados de tal forma que la diferencia entre ellos parece que está oculta. Lo que ocurre es que, cuando se utiliza esta segunda notación, la distinción entre coordenadas y momentos aparece, no en las coordenadas ξ_α, sino en una matriz $2n$-dimensional que introducimos a continuación.

Matriz Ω

Introducimos a continuación una matriz $2n$-dimensional Ω defida de la siguiente forma

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{bmatrix}$$

donde 0_n es la matriz nula n-dimensional e I_n es la matriz unidad n-dimensional. Denotaremos por $\omega_{\alpha\beta}$ los elementos de esta matriz, esto es,

$$\Omega = [\,\omega_{\alpha\beta}\,]\,, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n.$$

La matriz Ω posee varias propiedades interesantes

(i) Ω es antisimétrica, esto es,

$$\Omega^t + \Omega = 0_{2n}\,, \quad \omega_{\beta\alpha} = -\,\omega_{\alpha\beta}\,.$$

(ii) Ω es ortogonal, esto es,

$$\Omega^t\,\Omega = I_{2n}\,, \quad \sum_\alpha \omega_{\alpha\mu}\,\omega_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu}\,.$$

(iii) Ω es unimodular, esto es,

$$\det \Omega = 1\,.$$

Ecuaciones de Hamilton y P. de P.

Cuando utilizamos esta nueva notación, una función R, definida en el espacio de fases, la escribiremos de la forma $R = R(\xi)$ (caso independiente del tiempo) o $R = R(\xi, t)$ (caso dependiente del tiempo). Esto significa que la evolución temporal de R vendrá dada por la siguiente expresión

$$\frac{dR}{dt} = \sum_\alpha \Big(\frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha}\Big)\,\dot{\xi}_\alpha + \frac{\partial R}{\partial t}\,.$$

Un caso particular de función definida en el espacio de fases es el propio Hamiltoniano que ahora escribimos de la forma $H = H(\xi)$ (caso independiente del tiempo) o $H = H(\xi, t)$ (caso dependiente del tiempo) y cuya evolución temporal viene dada por

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha} \Big(\frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} \Big) \dot{\xi}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} \, .$$

Las Ec. de Hamilton, que en la notación tradicional se presentan como dos conjuntos de n ecuaciones, aparecen ahora de una forma unificada como un único conjunto de $2n$ ecuaciones

$$\dot{\xi}_\alpha = \sum_{\beta} \omega_{\alpha\beta} \, \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} \, , \quad \alpha = 1, 2, \ldots, 2n \, .$$

Si particularizamos α para $\alpha = i$ o para $\alpha = n+i$ entonces recuperamos las expresiones conocidas para $\dot{q}_i$ y $\dot{p}_i$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \dot{q}_i = \sum_{\beta} \omega_{i\beta} \, \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} = \omega_{i\,n+i} \, \frac{\partial H}{\partial \xi_{n+i}} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \, , \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \dot{\xi}_{n+i} &= \dot{p}_i = \sum_{\beta} \omega_{n+i\,\beta} \, \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} = \omega_{n+i\,i} \, \frac{\partial H}{\partial \xi_i} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \, , \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

El paréntesis de Poisson de dos funciones R y S se escribe ahora de la siguiente forma

$$\{R, S\} = \sum_{\alpha\,\beta} \Big(\frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha} \Big) \, \omega_{\alpha\beta} \, \Big(\frac{\partial S}{\partial \xi_\beta} \Big) \, ,$$

con lo que, volviendo a considerar las ecuaciones de Hamilton, obtenemos la siguiente expresión

$$\dot{\xi}_\alpha = \{\xi_\alpha, H\} \, , \quad \alpha = 1, 2, \ldots, 2n,$$

cuando se escriben utilizando los P. de P. Finalmente, los paréntesis de Poisson fundamentales, que en la notación tradicional contiene los tres posibles emparejamientos, (i) q_i con q_j, (ii) q_i con p_j, y (iii) p_i con p_j, se reducen a un único caso que queda de la siguiente forma

$$\{\xi_\alpha, \xi_\beta\} = \omega_{\alpha\beta} \, , \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Conviene resaltar que este resultado nos permite reinterpretar la matriz Ω como la matriz formada por los paréntesis de Poisson fundamentales

$$\Omega = \Big[\{\xi_\alpha, \xi_\beta\} \Big]$$

o con más detalle

$$\Omega = \begin{bmatrix} \{\xi_i, \xi_j\} & \{\xi_i, \xi_{n+j}\} \\ \{\xi_{n+i}, \xi_j\} & \{\xi_{n+i}, \xi_{n+j}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{q_i, q_j\} & \{q_i, p_j\} \\ \{p_i, q_j\} & \{p_i, p_j\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{bmatrix} \, .$$

4.2.2 Resumen comparativo entre las dos notaciones del formalismo Hamiltoniano

Coordenadas	n posiciones q_k n momentos p_k	$2n$ coordenadas $\xi_\alpha,\ \alpha = 1, 2 \ldots, 2n$
Hamiltoniano	$H = H(q, p, t)$	$H = H(\xi, t)$
Ecuaciones de Hamilton	$\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$ $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$	$\dot{\xi}_\alpha = \sum_\beta \omega_{\alpha\beta} \dfrac{\partial H}{\partial \xi_\beta}$
Parentesis de Poisson fundamentales	$\{q_r, q_s\} = 0$ $\{p_r, p_s\} = 0$ $\{q_r, p_s\} = \delta_{rs}$	$\{\xi_\alpha, \xi_\beta\} = \omega_{\alpha\beta}$
Ecuaciones de Hamilton Parentesis de Poisson	$\dot{q}_i = \{q_i, H\}$ $\dot{p}_i = \{p_i, H\}$	$\dot{\xi}_\alpha = \{\xi_\alpha, H\}$

4.3 Teorema del Paréntesis de Poisson

Consideremos un S. D. caracterizado por $2n$ variables x_k, y_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, y con ecuaciones de evolución dadas por

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x, y, t)\,, \quad \frac{dy_k}{dt} = g_k(x, y, t)\,.$$

Recordemoa que esta evolución temporal se dice que es de tipo Hamiltoniana si existe una función diferenciable $H(x, y, t)$ tal que las funciones f_k y g_k se pueden expresar de la forma

$$f_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}\,, \quad g_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

El siguiente teorema, que está relacionado con un teorema demostrado en el capítulo anterior, caracteriza las evoluciones temporales de tipo Hamiltoniano.

Teorema 2 *Consideremos un S. D. definido en un espacio de fases $2n$-dimensional con coordenadas ξ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, 2n$, y con una evolución temporal gobernada por las ecuaciones*

$$\frac{d}{dt}\,\xi_\alpha = \Psi_\alpha(\xi, t)\,, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Denotemos por $\{R, S\}$ el P. de P. de dos variables dinámicas arbitrarias R y S definido de la forma

$$\{R, S\} = \sum_{\alpha\,\beta} \Big(\frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha}\Big)\,\omega_{\alpha\beta}\,\Big(\frac{\partial S}{\partial \xi_\beta}\Big)\,.$$

Entonces este S. D. es un S. Hamiltoniano si y solo si se cumple que la evolución temporal del P. de P. satisface la siguiente propiedad

$$\frac{d}{dt}\{R, S\} = \Big\{\frac{d}{dt}R, S\Big\} + \Big\{R, \frac{d}{dt}S\Big\}\,.$$

(1) Supongamos que la evolución es de tipo Hamiltoniana. Hemos demostrado anteriormente que en este caso se cumple que la derivada con respecto al tiempo del P. de P. de R con S viene dada por

$$\frac{d}{dt}\{R, S\} = \Big\{\frac{d}{dt}R, S\Big\} + \Big\{R, \frac{d}{dt}S\Big\}\,.$$

(2) Supongamos ahora que se cumple la siguiente propiedad

$$\frac{d}{dt}\{R, S\} = \Big\{\frac{d}{dt}R, S\Big\} + \Big\{R, \frac{d}{dt}S\Big\}\,.$$

Consideremos el caso particular en que las funciones R y S son las funciones coordenada ξ_α y ξ_β. Entonces la propiedad anterior queda de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt}\{\xi_\alpha, \xi_\beta\} = \{\dot{\xi}_\alpha, \xi_\beta\} + \{\xi_\alpha, \dot{\xi}_\beta\}$$

Por otra parte, como el P. de P. de estas dos funciones es $\omega_{\alpha\beta}$, su derivada con respecto al tiempo se anula

$$\frac{d}{dt}\{\xi_\alpha, \xi_\beta\} = \frac{d}{dt}\,\omega_{\alpha\beta} = 0\,,$$

y estas dos igualdades conducen a la siguiente ecuación

$$\{\Psi_\alpha, \xi_\beta\} + \{\xi_\alpha, \Psi_\beta\} = 0\,.$$

Si calculamos por separado cada uno de estos dos paréntesis

$$\begin{aligned}
\{\Psi_\alpha, \xi_\beta\} &= \sum_{\rho\,\sigma} \Big(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \xi_\rho}\Big)\,\omega_{\rho\sigma}\,\Big(\frac{\partial \xi_\beta}{\partial \xi_\sigma}\Big) = \sum_{\rho} \Big(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \xi_\rho}\Big)\,\omega_{\rho\beta}\,, \\
\{\xi_\alpha, \Psi_\beta\} &= \sum_{\rho\,\sigma} \Big(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \xi_\rho}\Big)\,\omega_{\rho\sigma}\,\Big(\frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \xi_\sigma}\Big) = \sum_{\sigma} \omega_{\alpha\sigma}\,\Big(\frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \xi_\sigma}\Big)\,,
\end{aligned}$$

obtenemos que la ecuación anterior queda de la siguiente forma

$$\sum_{\rho}\Big(\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial\xi_\rho}\Big)\,\omega_{\rho\beta}+\sum_{\sigma}\omega_{\alpha\sigma}\,\Big(\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial\xi_\sigma}\Big)=0\,.$$

Multiplicando por $\omega_{\alpha\mu}$ y por $\omega_{\beta\nu}$ obtenemos

$$\sum_{\alpha\,\beta}\omega_{\alpha\mu}\Big[\sum_{\rho}\Big(\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial\xi_\rho}\Big)\,\omega_{\rho\beta}\Big]\omega_{\beta\nu}+\sum_{\alpha\,\beta}\omega_{\alpha\mu}\Big[\sum_{\sigma}\omega_{\alpha\sigma}\Big(\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial\xi_\sigma}\Big)\Big]\omega_{\beta\nu}=0\,.$$

y teniendo en cuenta

$$\sum_{\beta}\omega_{\rho\beta}\,\omega_{\beta\nu}=-\,\delta_{\nu\rho}\,,\quad \sum_{\alpha}\omega_{\alpha\mu}\,\omega_{\alpha\sigma}=\delta_{\mu\sigma}\,,$$

llegamos a

$$\sum_{\alpha}\omega_{\alpha\mu}\,\Big(\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial\xi_\nu}\Big)=\sum_{\beta}\omega_{\beta\nu}\,\Big(\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial\xi_\mu}\Big)\,.$$

Denotemos por H_μ las funciones definidas de la siguiente forma

$$H_\mu=\sum_{\alpha}\omega_{\alpha\mu}\,\Psi_\alpha\,,\quad \mu=1,2,\ldots,2n\,.$$

Entonces, utilizando estas funciones, la igualdad anterior queda

$$\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\,H_\mu=\frac{\partial}{\partial\xi_\mu}\,H_\nu\,,$$

lo cual indica que existe una función $H=H(\xi,t)$ tal que

$$H_\mu=\frac{\partial H}{\partial\xi_\mu}\,,\quad \mu=1,2,\ldots,2n\,.$$

Finalmente, multiplicando H_μ por $\omega_{\beta\mu}$ y recordando que $\sum_\mu\omega_{\beta\mu}\,\omega_{\alpha\mu}=\delta_{\beta\alpha}$ llegamos a la siguiente expresión para las funciones Ψ_β

$$\Psi_\beta=\sum_{\mu}\omega_{\beta\mu}\,\Big(\frac{\partial H}{\partial\xi_\mu}\Big)\,,\quad \beta=1,2,\ldots,2n\,.$$

Este resultado muestra que las ecuaciones del movimiento son Hamiltonianas que era lo que se quería demostrar. ∎

Finalmente comentemos que este teorema también se puede demostrar utilizando la notación tradicional (q_j,p_j); sin embargo se comprueba que, para realizar los cálculos que aparecen en la demostración, la notación ξ_α resulta más adecuada.

Capítulo 5

Transformaciones Canónicas

1. Transformaciones canonoides
2. Transformaciones canonoides y Hamiltonianos cuadráticos
3. Transformaciones Canónicas
4. Paréntesis de Lagrange

5.1 Transformaciones canonoides

5.1.1 Introducción

En el formalismo Lagrangiano consideramos cambios de coordenadas en el espacio de configuración Q mediante los cuales pasamos de un conjunto de coordenadas $\{q_i\}$ a otro nuevo $\{Q_i\}$ utilizando para ello ecuaciones de la forma

$$q_i \;\to\; Q_i\,, \quad Q_i = Q_i(q)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Este cambio determina una transformación de las velocidades de tal forma que las velocidades antiguas $\{v_i\}$ son sustituidas por las nuevas velocidades $\{V_i\}$. Consideradas conjuntamente tenemos un cambio de coordenadas y velocidades de la siguiente forma

$$(q_i v_i) \;\to\; (Q_i, V_i)\,, \quad Q_i = Q_i(q)\,,\; V_i = \sum_j \Big(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\Big)\, v_j\,.$$

Este tipo de transformaciones del espacio de fases de las velocidades TQ se denominan "transformaciones puntuales".

La característica más importante de las transformaciones puntuales es que preservan el carácter Lagrangiano de las ecuaciones del movimiento. Esto significa que transforman ecuaciones Lagrangianas en ecuaciones Lagrangianas.

En el formalismo Hamiltoniano los momentos p_i son coordenada independientes con análoga categoría que las coordenadas generalizadas q_i. Por consiguiente, cuando se trabaja dentro del marco Hamiltoniano, es conveniente ampliar el concepto de transformación e incluir transformaciones que cambien simultáneamente a las posiciones q_i y a los momentos p_i

$$(q_i, p_i) \;\rightarrow\; (Q_i, P_i)\,, \quad Q_i = Q_i(q,p)\,,\; P_i = P_i(q,p)\,.$$

Consideremos un cierto sistema cuya evolución temporal está caracterizado por unas ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= f_i(q,p,t) \\ \dot{p}_i &= g_i(q,p,t) \end{aligned}$$

Supongamos que el sistema es Hamiltoniano; esto significa que existe una función $H(q,p,t)$ tal que f_i y g_i se pueden escribir de la forma

$$f_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad g_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,.$$

Consideremos un cambio $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$. Las nuevas ecuaciones son

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= F_i(Q,P,t) \\ \dot{P}_i &= G_i(Q,P,t) \end{aligned}$$

Diremos que la transformación $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$ es *canonoide con respecto a* H si las nuevas ecuaciones también son Hamiltonianas. Esto es, existe una función $K(Q,P,t)$ tal que

$$F_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}\,, \quad G_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}\,.$$

Conviene resaltar que una transformación que es canonoide con respecto a H no lo será en general con respecto a otro Hamiltoniano $\widetilde{H} \neq H$.

Ilustraremos esta propiedad con un ejemplo. Consideremos el Hamiltoniano de la partícula libre en una dimensión

$$H = \tfrac{1}{2}\,p^2\,, \quad (m=1)\,,$$

con ecuaciones

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p\,, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0\,,$$

y supongamos la transformación $(q,p) \rightarrow (Q,P)$ definida de la forma

$$Q = q\,, \quad P = p^{1/a} - q^b\,.$$

Entonces las nuevas ecuaciones son

$$\dot{Q} = \dot{q} = p = (Q^b + P)^a \,, \quad \dot{P} = -b\, q^{b-1}\dot{q} = -\, b\, Q^{b-1}(Q^b + P)^a \,,$$

que se pueden escribir utilizando un nuevo Hamiltoniano que denotamos por K

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \,, \quad \dot{P} = -\,\frac{\partial K}{\partial Q} \,, \quad K = \frac{1}{a+1}(Q^b + P)^{a+1} \,.$$

Es fácil comprobar que esta transformación, que es canonoide para la partícula libre $H = (1/2)p^2$, no lo es para un Hamiltoniano de la forma $H = (1/2)p^2 + V(q)$.

5.1.2 Transformaciones canonoides y paréntesis de Poisson

Nuestro objetivo es estudiar las propiedades de las transformaciones canonoides y, más particularmente, relacionar las propiedades de las transformaciones canonoides con las propiedades de los paréntesis de Poisson.

Supongamos en primer lugar que una transformación $(q, p) \to (Q, P)$ preserva los paréntesis de Poisson salvo una constante multiplicativa

$$\{R, S\}_{(Q,P)} = k\, \{R, S\}_{(q,p)} \,, \quad k \neq 0 \,.$$

Entonces la derivada con respecto al tiempo del paréntesis de Poisson de R con S calculado después del cambio viene dado por

$$\frac{d}{dt}\{R, S\}_{(Q,P)} = k\, \frac{d}{dt}\{R, S\}_{(q,p)} \,.$$

La derivada con respecto al tiempo del paréntesis antes del cambio satisface la propiedad

$$\frac{d}{dt}\{R, S\}_{(q,p)} = \left\{\frac{dR}{dt}, S\right\}_{(q,p)} + \left\{R, \frac{dS}{dt}\right\}_{(q,p)} \,.$$

Por consiguiente se cumple

$$\frac{d}{dt}\{R, S\}_{(Q,P)} = k\left\{\frac{dR}{dt}, S\right\}_{(q,p)} + k\left\{R, \frac{dS}{dt}\right\}_{(q,p)} \,,$$

lo que conduce a

$$\frac{d}{dt}\{R, S\}_{(Q,P)} = \left\{\frac{dR}{dt}, S\right\}_{(Q,P)} + \left\{R, \frac{dS}{dt}\right\}_{(Q,P)} \,.$$

Recordemos que se ha demostrado que esta propiedad solo es cierta si la evolución temporal es de tipo Hamiltoniana; esto significa que necesariamente debe existir una función $K = K(Q, P, t)$ tal que

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \,, \quad \dot{P}_i = -\,\frac{\partial K}{\partial Q_i} \,.$$

En definitiva, hemos demostrado la siguiente propiedad

Proposición 5 *Consideremos una transformación $(q,p) \to (Q,P)$ del espacio de fases y supongamos que preserva los paréntesis de Poisson salvo una constante multiplicativa*

$$\{R,S\}_{(Q,P)} = k\,\{R,S\}_{(q,p)}\,, \quad k \neq 0\,.$$

Entonces esta transformación es canonoide para todos los Hamiltonianos.

Esta propiedad es realmente interesante desde un punto de vista teórico pero difícil de utilizar desde el punto de vista práctico. Resultaría conveniente obtener un conjunto suficiente de funciones. Esto es, un conjunto restringido de funciones tal que si la propiedad se cumple para ellas entonces se cumple para todas las variables dinámicas.

La siguiente propiedad considera esta cuestión.

Proposición 6 *Consideremos una transformación $(q_i,p_i) \to (Q_j,P_j)$ del espacio de fases y supongamos que preserva los paréntesis de Poisson fundamentales salvo una constante multiplicativa*

$$\{q_r,q_s\}_{(Q,P)} = 0\,, \quad \{p_r,p_s\}_{(Q,P)} = 0\,, \quad \{q_r,p_s\}_{(Q,P)} = k\,\delta_{rs}\,.$$

Entonces esta propiedad es cierta para todos los paréntesis de Poisson.

El P. de P. de dos funciones arbitrarias R y S con respecto a las nuevas variables (Q,P) viene dado por

$$\{R,S\}_{(Q,P)} = \sum_i \Big(\frac{\partial R}{\partial Q_i}\frac{\partial S}{\partial P_i} - \frac{\partial R}{\partial P_i}\frac{\partial S}{\partial Q_i}\Big)\,.$$

Las derivadas parciales de R y S con respecto a Q_i y P_i se pueden expresar utilizando las funciones $q_r = q_r(Q,P)$ y $p_s = p_s(Q,P)$. El resultado es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial Q_i} &= \sum_r \Big(\frac{\partial R}{\partial q_r}\frac{\partial q_r}{\partial Q_i} + \frac{\partial R}{\partial p_r}\frac{\partial p_r}{\partial Q_i}\Big)\,,\\
\frac{\partial R}{\partial P_i} &= \sum_r \Big(\frac{\partial R}{\partial q_r}\frac{\partial q_r}{\partial P_i} + \frac{\partial R}{\partial p_r}\frac{\partial p_r}{\partial P_i}\Big)\,,
\end{aligned}$$

y análogas expresiones para $\partial S/\partial Q_i$ y $\partial S/\partial P_i$. Sustituyendo estas expresiones en el P. de P. y agrupando adecuadamente los sumandos llegamos a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\{R,S\}_{(Q,P)} &= \sum\Big(\frac{\partial R}{\partial q_r}\frac{\partial S}{\partial q_s}\Big)\{q_r,q_s\}_{(Q,P)} + \sum\Big(\frac{\partial R}{\partial q_r}\frac{\partial S}{\partial p_s}\Big)\{q_r,p_s\}_{(Q,P)}\\
&+ \sum\Big(\frac{\partial R}{\partial p_r}\frac{\partial S}{\partial q_s}\Big)\{p_r,q_s\}_{(Q,P)} + \sum\Big(\frac{\partial R}{\partial p_r}\frac{\partial S}{\partial p_s}\Big)\{p_r,p_s\}_{(Q,P)}\,.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los valores de los paréntesis de q_r y p_s con respecto al sistema (Q_i,P_i) obtenemos

$$\{R,S\}_{(Q,P)} = k\sum \delta_{rs}\Big(\frac{\partial R}{\partial q_r}\frac{\partial S}{\partial p_s} - \frac{\partial R}{\partial p_r}\frac{\partial S}{\partial q_s}\Big) = k\,\{R,S\}_{(q,p)}\,,$$

que es el resultado que deseabamos obtener. ∎

5.2 Transformaciones canonoides y Hamiltonianos cuadráticos

Hemos visto anteriormente que una transformación que es canonoide para un cierto Hamiltoniano H puede no serlo para otro Hamiltoniano $H' \neq H$. Existen, sin embargo, transformaciones que son canonoides para todos los Hamiltonianos. Estas transformaciones son ciertamente importantes y merecen ser estudiadas con detalle.

Definición 1 *Una transformación $(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$ que es canonoide para todos los Hamiltonianos se denomina canónica generalizada.*

Esta definición es una definición correcta pero parece poco útil desde un punto de vista práctico ya que para comprobar si una cierta transformación es canónica generalizada habría que comprobar que satisface la propiedad para todos los Hamiltonianos H sea cual sea este H.

Sería conveniente obtener un conjunto suficiente. Se trata de obtener una familia de Hamiltonianos (familia que conviene que sea reducida) tal que si la transformación es canonoide con respecto a esta familia entonces es canonoide para todos los Hamiltonianos.

Teorema 3 *Supongamos que una transformación del espacio de fases es canonoide para todos los Hamiltonianos cuadráticos. Entonces esta transformación preserva los paréntesis de Poisson salvo una constante multiplicativa.*

Consideremos la transformación $\xi \to \eta$ y denotemos por $m_{\alpha\beta}$ las funciones definidas de la forma

$$m_{\alpha\beta} = \{\xi_\alpha, \xi_\beta\}_\eta \,, \quad m_{\beta\alpha} = -\, m_{\alpha\beta} \,, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n,$$

y supongamos que la transformación $\xi \to \eta$ es canonoide para todos los Hamiltonianos de la forma

$$H = H_0 + H_1 + H_2 \,,$$

donde H_0, H_1 y H_2 denotan las siguientes funciones

$$H_0 = c_0 \,, \quad H_1 = \sum_\alpha c_\alpha \xi_\alpha \,, \quad H_2 = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha\,\beta} S_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \,, \quad S_{\beta\alpha} = S_{\alpha\beta} \,.$$

La demostración se realiza en tres pasos.

(1) Supongamos, en primer lugar, que la transformación $\xi \to \eta$ es canonoide para todos los Hamiltonianos de la forma $H = H_0 = c_0$ donde c_0 es una constante arbitraria.

En primer lugar, se comprueba que la derivada total de de $m_{\alpha\beta}$ con respecto al tiempo viene dada por la derivada parcial con respecto a t ya que

$$\frac{d}{dt} m_{\alpha\beta} = \{m_{\alpha\beta}, H_0\} + \frac{\partial}{\partial t} m_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial t} m_{\alpha\beta} \,.$$

Esta derivada es nula ya que, teniendo en cuenta que las ecuaciones de Hamilton son sencillamente

$$\frac{d}{dt}\, \xi_\alpha = 0 \,,$$

obtenemos

$$\frac{d}{dt}m_{\alpha\beta} = \left\{\frac{d}{dt}\xi_\alpha, \xi_\beta\right\} + \left\{\xi_\alpha, \frac{d}{dt}\xi_\beta\right\} = 0\,.$$

Por consiguiente podemos afirmar que si la transformación $\xi \to \eta$ es canonoide para todos los Hamiltonianos de la forma $H = c_0$ entonces las funciones $m_{\alpha\beta}$ son independientes del tiempo

$$\frac{\partial}{\partial t}\, m_{\alpha\beta} = 0\,.$$

(2) Supongamos, en segundo lugar, que la transformación $\xi \to \eta$ es también canonoide para todos los Hamiltonianos lineales de la forma

$$H = H_1 = \sum_\alpha c_\alpha \xi_\alpha\,,$$

donde c_α son constantes arbitrarias.

En este caso, teniendo en cuenta que las ecuaciones de Hamilton son de la forma

$$\frac{d}{dt}\,\xi_\alpha = \sum_\mu \omega_{\alpha\mu}\,\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} = \sum_\mu \omega_{\alpha\mu} c_\mu\,, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, 2n,$$

obtenemos que la derivada de $m_{\alpha\beta}$ con respecto al tiempo viene dada por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m_{\alpha\beta} &= \left\{\frac{d}{dt}\,\xi_\alpha, \xi_\beta\right\} + \left\{\xi_\alpha, \frac{d}{dt}\,\xi_\beta\right\} \\ &= \left\{\sum_\mu \omega_{\alpha\mu} c_\mu, \xi_\beta\right\} + \left\{\xi_\alpha, \sum_\mu \omega_{\beta\mu} c_\mu\right\} = 0\,,\end{aligned}$$

de lo que se deduce que se tiene que cumplir

$$\{m_{\alpha\beta}, H_1\} + \frac{\partial}{\partial t}\, m_{\alpha\beta} = \{m_{\alpha\beta}, \sum_\mu c_\mu \xi_\mu\} = 0\,.$$

Calculando el P. de P., obtenemos

$$\sum_\mu c_\mu \{m_{\alpha\beta}, \xi_\mu\} = \sum_\mu c_\mu \left[\sum_{\lambda\,\nu} \left(\frac{\partial m_{\alpha\beta}}{\partial \xi_\lambda}\right) \omega_{\lambda\nu} \left(\frac{\partial \xi_\mu}{\partial \xi_\nu}\right)\right] = \sum_\mu c_\mu \left[\sum_\lambda \left(\frac{\partial m_{\alpha\beta}}{\partial \xi_\lambda}\right) \omega_{\lambda\mu}\right] = 0\,,$$

y como los coeficientes c_μ son constantes arbitrarias se deduce que deben ser nulas todas las derivadas de $m_{\alpha\beta}$ con respecto a las coordenadas ξ_μ.

Por consiguiente, si la transformación $\xi \to \eta$ es canonoide para todos los Hamiltonianos de la forma $H = H_0 + H_1$ entonces las funciones $m_{\alpha\beta}$ son constantes numéricas

$$\frac{\partial}{\partial t}\, m_{\alpha\beta} = 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_\mu}\, m_{\alpha\beta} = 0\,, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n.$$

(3) Supongamos, finalmente, que la transformación $\xi \to \eta$ es canonoide para todos los Hamiltonianos cuadráticos de la forma

$$H = H_2 = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha\,\beta} S_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \,, \quad S_{\beta\alpha} = S_{\alpha\beta} \,.$$

Hemos demostrado que $m_{\alpha\beta}$ son constante numéricas, por consiguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_{\alpha\beta} &= \left\{ \frac{d}{dt}\, \xi_\alpha, \xi_\beta \right\} + \left\{ \xi_\alpha, \frac{d}{dt}\, \xi_\beta \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\rho\,\nu} \omega_{\alpha\rho} S_{\rho\nu} \xi_\nu, \xi_\beta \right\} + \left\{ \xi_\alpha, \sum_{\rho\,\nu} \omega_{\beta\rho} S_{\rho\nu} \xi_\nu \right\} = 0 \,, \end{aligned}$$

de lo que se deduce que

$$\sum_{\rho\,\nu} \omega_{\alpha\rho} S_{\rho\nu} m_{\nu\beta} + \sum_{\rho\,\nu} \omega_{\beta\rho} S_{\rho\nu} m_{\alpha\nu} = 0 \,.$$

En notación matricial queda de la siguiente forma

$$\Omega S M + M S\, \Omega^t = 0 \,, \quad M = [m_{\alpha\beta}] \,, \quad S = [S_{\alpha\beta}] \,.$$

Multiplicando por Ω, y recordando que $\Omega^t = -\Omega$ y $\Omega^2 = -I$, obtenemos

(i) La matriz $M\Omega$ es una matriz simétrica

$$(M\Omega) = (M\Omega)^t \,.$$

(ii) La matriz $M\Omega$ es una matriz simétrica que conmuta con todas las matrices simétricas

$$S\,(M\Omega) = (M\Omega)\, S \,.$$

Esto solo es posible si la matriz producto $M\Omega$ es múltiplo de la identidad, esto es,

$$M\Omega = -k\, I$$

lo que conduce a

$$M = k\,\Omega \,, \quad \{\xi_\alpha, \xi_\beta\}_\eta = k\, \omega_{\alpha\beta} \,.$$

■

5.3 Transformaciones Canónicas

Empecemos con los siguientes tres puntos que reflejan propiedades demostradas en las dos secciones anteriores.

(i) Preserva los paréntesis de Poisson salvo una constante multiplicativa $\Rightarrow$ Es canónica generalizada (canonoide para todos los Hamiltonianos).

(ii) Es canónica generalizada $\Rightarrow$ Es canonoide para todos los Hamiltonianos cuadráticos.

(iii) Es canonoide para todos los Hamiltonianos cuadráticos $\Rightarrow$ Preserva los paréntesis de Poisson salvo una constante multiplicativa.

5.3.1 Transformaciones Canónicas generalizadas

Como consecuencia del teorema de los Hamiltonianos cuadráticos hemos obtenido la siguiente propiedad que caracteriza a las transformaciones canónicas generalizadas

Proposición 7 *Una transformación $\xi \mapsto \eta$ es transformación canónica generalizada si y solo si preserva los paréntesis de Poisson salvo una constante multiplicativa*

Esto es, consideremos una transformación del espacio de fases T^*Q representada por las ecuaciones

$$\xi_\alpha \mapsto \eta_\alpha \,, \quad \eta_\alpha = \eta_\alpha(\xi_\alpha, t) \,,$$

que suponemos diferenciable e invertible

$$\eta_\alpha \mapsto \xi_\alpha \,, \quad \xi_\alpha = \xi_\alpha(\eta_\alpha, t) \,.$$

Entonces esta transformación es canónica generalizada si y solo si se cumple

$$\{R, S\}_\eta = k \, \{R, S\}_\xi \,, \quad k \neq 0 \,,$$

para todo par de variables dinámicas R y S.

Las transformaciones canónicas generalizadas poseen ciertas propiedades entre las que cabe detacar las siguientes

(i) La transformación identidad $\xi = \eta$ es transformación canónica generalizada de una forma trivial ya que deja todo invariante.

(ii) Sean Φ_1 y Φ_2 dos transformaciones canónicas generalizadas

$$\begin{aligned} \Phi_1 \ : \ & \xi \mapsto \eta \,, \quad \eta_\alpha = \eta_\alpha(\xi, t) \,, \\ \Phi_2 \ : \ & \eta \mapsto \zeta \,, \quad \zeta_\beta = \zeta_\beta(\eta, t) \,, \end{aligned}$$

con constantes asociadas k_1 y k_2. Entonces

$$\{R, S\}_\zeta = k_2 \, \{R, S\}_\eta = (k_2 k_1) \, \{R, S\}_\xi \,, \quad k_2 k_1 \neq 0 \,.$$

Por consiguiente la transformación $\Phi_2 \circ \Phi_1$ también es canónica generalizada ya que preserva los paréntesis de Poisson salvo la constante multiplicativa $k_2 k_1$.

(iii) Sea Φ una transformación canónica generalizada caracterizada por una constante k

$$\Phi : \xi \mapsto \eta \,, \quad \eta_\alpha = \eta_\alpha(\xi_\alpha, t) \,,$$

y denotemos por Φ^{-1} la transformación inversa

$$\Phi^{-1} : \eta \mapsto \xi \,, \quad \xi_\alpha = \xi_\alpha(\eta_\alpha, t) \,.$$

Entonces

$$\{R, S\}_\xi = \frac{1}{k} \, \{R, S\}_\eta \,.$$

Por consiguiente la transformación Φ^{-1} también es canónica generalizada ya que preserva los paréntesis de Poisson salvo la constante multiplicativa $1/k$.

Como consecuencia de estas propiedades podemos afirmar que

El conjunto de todas las transformaciones canónicas generalizadas tienen estructura de grupo.

5.3.2 Transformaciones Canónicas

Hemos demostrado que una transformación $\xi \to \eta(\xi, t)$ es canónica generalizada si existe una contante no nula $k \neq 0$ tal que para todo par de variables dinámicas R y S se cumple

$$\{R, S\}_\zeta = k \{R, S\}_\eta .$$

Un tipo de transformación importante es aquella caracterizada por un valor $k = 1$.

Definición 2 *Una transformación $\xi \mapsto \eta$ que preserva los paréntesis de Poisson*

$$\{R, S\}_\zeta = \{R, S\}_\eta$$

se denomina transformación canónica

Esto significa que la operación de calcular los P. de P. conmuta con la transformación. En la práctica, calcular los P. de P. primero y efectuar después los cambios de variable conduce al mismo resultado que efectuar las operaciones en orden inverso. Esto queda reflejado en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} R(q,p), S(q,p) & \xrightarrow{\{\cdot,\cdot\}} & \{R,S\}_{(q,p)} \\ \Phi \big\downarrow & & \big\downarrow \Phi \\ R(Q,P), S(Q,P) & \xrightarrow{\{\cdot,\cdot\}} & \{R,S\}_{(Q,P)} \end{array}$$

Proposición 8 *El conjunto de todas las transformaciones canónicas tiene estructura de grupo*

Esto significa que se cumplen las tres propiedades siguientes:

(i) La transfomación identidad es canónica.

(ii) La aplicación sucesiva de dos transformaciones canónicas también es canónica.

(iii) La transformación inversa de una transformación canónica también es canónica.

(iv) La aplicación sucesiva de transformaciones canónicas satisface la ley asociativa de la multiplicación.

En la práctica para demostrar que los paréntesis de Poisson se mantienen invariantes basta con comprobar esta propiedad en el caso particular de los paréntesis de Poisson fundamentales

Supongamos que se cumple

$$\{\eta_\alpha, \eta_\beta\}_\xi = \sum_{\mu\,\nu} \Big(\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu}\Big)\, \omega_{\mu\,\nu} \Big(\frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu}\Big) = \omega_{\alpha\,\beta}\,.$$

Entonces el P. de P. de R con S, que viene dado por

$$\{R, S\}_\eta = \sum_{\alpha\,\beta} \Big(\frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha}\Big)\, \omega_{\alpha\,\beta} \Big(\frac{\partial S}{\partial \eta_\beta}\Big)\,,$$

se puede calcular sustituyendo $\omega_{\alpha\beta}$ por el P. de P. fundamental

$$\{R, S\}_\eta = \sum_{\alpha\,\beta} \Big(\frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha}\Big) \Big[\sum_{\mu\,\nu} (\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu})\, \omega_{\mu\,\nu}\, (\frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu})\Big] \Big(\frac{\partial S}{\partial \eta_\beta}\Big)$$

lo que conduce a

$$\begin{aligned} \{R, S\}_\eta &= \sum_{\mu\,\nu} \Big[\sum_{\alpha} \Big(\frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha}\Big) (\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu})\, \omega_{\mu\,\nu} \sum_{\beta} (\frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu}) \Big(\frac{\partial S}{\partial \eta_\beta}\Big)\Big] \\ &= \sum_{\mu\,\nu} \Big(\frac{\partial R}{\partial \xi_\mu}\Big)\, \omega_{\mu\,\nu} \Big(\frac{\partial S}{\partial \xi_\nu}\Big) = \{R, S\}_\xi \end{aligned}$$

Podemos resumir esta propiedad de la siguiente forma

$$\text{Si} \quad \{\eta_\alpha, \eta_\beta\}_\xi = \omega_{\alpha\,\beta} \quad \text{entonces} \quad \{R, S\}_\eta = \{R, S\}_\xi\,.$$

Una transformación canónica es invertible y por consiguiente tiene un Jacobiano J (determinante de la matriz Jacobiana) no nulo

$$J = \frac{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_{2n})}{\partial(\eta_1 \ldots, \eta_{2n})} \neq 0\,.$$

Consideremos de nuevo la propiedad

$$\sum_{\mu\,\nu} \Big(\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu}\Big)\, \omega_{\mu\,\nu} \Big(\frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu}\Big) = \omega_{\alpha\,\beta}\,,$$

que se puede presentar utilizando la notación matricial de la siguiente forma

$$\Big[\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu}\Big] [\omega_{\mu\nu}] \Big[\frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu}\Big] = [\omega_{\alpha\beta}]\,.$$

El determinante del producto de matrices de la izquierda se puede calcular recordando que el determinate del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de las dos

matrices (esto es, $\det(A\,B) = (\det A)(\det B)$) y que el determinante de la traspuesta de una matriz es igual al determinante de la matriz original (esto es, $\det A^t = \det A$). Utilizando estas dos propiedades se obtiene

$$\Big(\det\Big[\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu}\Big]\Big)(\det[\omega_{\mu\,\nu}])\Big(\det\Big[\frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu}\Big]\Big) = (\det[\omega_{\alpha\,\beta}])\,,$$

de lo que se deduce que

$$\Big(\det\Big[\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu}\Big]\Big)^2 = 1\,.$$

Esto significa que si una transformación es canónica entonces el Jacobiano solo puede tomar los valores $J = +1$ ó $J = -1$ (posteriormente veremos que en realidad solo puede tomar el valor $J = +1$).

Finalmente, podemos caracterizar las transformaciones canónicas por la siguiente propiedad que enunciamos utilizando la notación tradicional:

Una transformación $(q, p) \to (Q, P)$ del Espacio de fases de los momentos T^*Q es transformación canónica si y solo si preserva los P. de P. fundamentales

$$\{Q_r, Q_s\} = 0\,, \quad \{P_r, P_s\} = 0\,, \quad \{Q_r, P_s\} = \delta_{rs}\,.$$

5.4 Paréntesis de Lagrange

Supongamos que $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ es un sistema de coordenadas canónicas en un espacio de fases T^*Q. Si cada una de ellas se puede expresar como función de dos variables, u y v, entonces se define el paréntesis de Lagrange de u con v de la siguiente forma

$$[u, v]_{(q,p)} = \sum_i \Big(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial p_i}{\partial u}\Big)\,.$$

Se denominan P. de L. asociados a la transformación $\xi \to \eta$ y se denotan por $[\eta_\alpha, \eta_\beta]_\xi$

$$[\eta_\alpha, \eta_\beta]_\xi = \sum_{\mu\nu}\Big(\frac{\partial \xi_\mu}{\partial \eta_\alpha}\Big)\,\omega_{\mu\nu}\,\Big(\frac{\partial \xi_\nu}{\partial \eta_\lambda}\Big)$$

Los P. de P. y los P. de L. están relacionados entre sí por la siguiente relación

$$\sum_\alpha \{\eta_\alpha, \eta_\beta\}\,[\eta_\alpha, \eta_\lambda] = \delta_{\beta\lambda}\,.$$

Se demuestra por cálculo directo. Denotemos por $\mathrm{PL}_{\beta\,\lambda}$ la expresión a calcular

$$\mathrm{PL}_{\beta\,\lambda} = \sum_\alpha \{\eta_\alpha, \eta_\beta\}\,[\eta_\alpha, \eta_\lambda] = \sum_\alpha \Big[\sum_{\mu\,\nu}\Big(\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu}\Big)\,\omega_{\mu\,\nu}\,\Big(\frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu}\Big)\Big]\Big[\sum_{\rho\,\sigma}\Big(\frac{\partial \xi_\rho}{\partial \eta_\alpha}\Big)\omega_{\rho\,\sigma}\,\Big(\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial \eta_\lambda}\Big)\Big]$$

Reordenando los factores y teniendo en cuenta que

$$\sum_{\alpha}\Big[\Big(\frac{\partial\xi_\rho}{\partial\eta_\alpha}\Big)\Big(\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial\xi_\mu}\Big)\Big]=\frac{\partial\xi_\rho}{\partial\xi_\mu}=\delta_{\rho\mu}\,,$$

obtenemos

$$\mathrm{PL}_{\beta\,\lambda}=\sum_{\mu\,\nu}\sum_{\rho\,\sigma}\Big[\,\delta_{\rho\,\mu}\,\omega_{\mu\,\nu}\;\omega_{\rho\,\sigma}\Big(\frac{\partial\eta_\beta}{\partial\xi_\nu}\Big)\Big(\frac{\partial\xi_\sigma}{\partial\eta_\lambda}\Big)\Big]=\sum_{\nu\,\sigma}\sum_{\mu}\Big[\,\omega_{\mu\,\nu}\,\omega_{\mu\,\sigma}\Big(\frac{\partial\eta_\beta}{\partial\xi_\nu}\Big)\Big(\frac{\partial\xi_\sigma}{\partial\eta_\lambda}\Big)\Big]\,.$$

Teniendo en cuenta que la matriz Ω es ortogonal

$$\sum_{\mu}\omega_{\mu\nu}\,\omega_{\mu\sigma}=\delta_{\nu\sigma}\,,$$

obtenemos

$$\mathrm{PL}_{\beta\,\lambda}=\sum_{\nu}\sum_{\sigma}\delta_{\nu\sigma}\Big(\frac{\partial\eta_\beta}{\partial\xi_\nu}\Big)\Big(\frac{\partial\xi_\sigma}{\partial\eta_\lambda}\Big)=\sum_{\nu}\Big(\frac{\partial\eta_\beta}{\partial\xi_\nu}\Big)\Big(\frac{\partial\xi_\nu}{\partial\eta_\lambda}\Big)=\frac{\partial\eta_\beta}{\partial\eta_\lambda}=\delta_{\beta\lambda}\,.$$

Resulta conveniente introducir las siguientes dos matrices $2n$-dimensionales

$$\begin{aligned} P &= [P_{\alpha\,\beta}]\,, \quad P_{\alpha\,\beta}=\{\eta_\alpha,\eta_\beta\}\,,\\ L &= [L_{\alpha\,\beta}]\,, \quad L_{\alpha\,\beta}=[\eta_\alpha,\eta_\beta]\,. \end{aligned}$$

Entonces la propiedad anteriormente demostrada se puede presentar de la siguiente forma matricial

$$P^t\,L=I_{2n}\,.$$

Recordemos que el determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes, $\det(A\,B)=(\det A)(\det B)$, y que una matriz A y su traspuesta A^t tienen el mismo determinante $\det A^t=\det A$. Los determinantes de P y L están relacionados entre sí de la siguiente forma

$$\det L=(\det P)^{-1}\,.$$

Está claro que un tipo de paréntesis determina al otro. Por consiguiente, si los P. de P. son invariantes bajo transformaciones canónicas se deduce que los P. de L. también lo son. Esto significa que una transformación $\xi\to\eta(\xi,t)$ es canónica si y solo si se cumple

$$[\eta_\alpha,\eta_\beta]=\omega_{\alpha\beta}\,.$$

Todas estas propiedades pueden ser presentadas utilizando la notación tradicional. Consideremos la transformación

$$(q,p)\quad\to\quad(Q,P)\,.$$

Entonces los P. de L. de las nuevas coordenadas y momentos (Q, P) con respecto a los antiguos (q, p) vienen dados por

$$\begin{aligned}
[Q_r, Q_s] &= \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_r} \frac{\partial p_i}{\partial Q_s} - \frac{\partial q_i}{\partial Q_r} \frac{\partial p_i}{\partial Q_s} \right), \\
[P_r, P_s] &= \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial P_r} \frac{\partial p_i}{\partial P_s} - \frac{\partial q_i}{\partial P_r} \frac{\partial p_i}{\partial P_s} \right), \\
[Q_r, P_s] &= \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_r} \frac{\partial p_i}{\partial P_s} - \frac{\partial q_i}{\partial Q_r} \frac{\partial p_i}{\partial P_s} \right).
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos caracterizar las transformaciones canónicas por la siguiente propiedad que enunciamos uttilizando la notación tradicional:

Una transformación $(q, p) \to (Q, P)$ del Espacio de fases de los momentos T^*Q es transformación canónica si y solo si

1. *Preserva los P. de P. fundamentales*

$$\{Q_r, Q_s\} = 0\,, \quad \{P_r, P_s\} = 0\,, \quad \{Q_r, P_s\} = \delta_{rs}\,.$$

2. *Preserva los P. de L. fundamentales*

$$[Q_r, Q_s] = 0\,, \quad [P_r, P_s] = 0\,, \quad [Q_r, P_s] = \delta_{rs}\,.$$

Capítulo 6

Funciones generatrices

1. Introducción
2. Función generatriz I : Cálculo directo
3. Función generatriz II : Métodos variacionales
4. Clasificación de las funciones generatrices: F_1, F_2, F_3, F_4.
5. Estudio de varios casos particulares.

6.1 Introducción

6.2 Función generatriz I : Cálculo directo

6.2.1 Caso independiente del tiempo

Consideremos una transformación $(q,p) \to (Q,P)$ del espacio de fases y denotemos por S la siguiente expresión

$$S = \sum_i p_i \dot{q}_i - \sum_j P_j \dot{Q}_j \,.$$

Teniendo en cuenta que la nueva coordenada Q_j es una función de la forma $Q_j = Q_j(q,p)$ tendremos

$$\dot{Q}_j = \sum_i \Big(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\Big)\dot{q}_i + \sum_i \Big(\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\Big)\dot{p}_i \,,$$

con lo que la función S queda de la siguiente forma

$$S = \sum_i A_i \dot{q}_i - \sum_i B_i \dot{p}_i \,,$$

donde las funciones A_i y B_i vienen dadas por

$$A_i = p_i - \sum_j \Big(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\Big) P_j \,, \qquad B_i = -\sum_j \Big(\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\Big) P_j \,.$$

Nos proponemos demostrar que, si la transformación es canónica, entonces S posee propiedades particularmente interesantes. Para ello estudiaremos las relaciones entre las funciones A_i y B_i.

(a) Las derivadas de las funciones A_i con respecto a las coordenadas q_k vienen dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial q_k} &= -\sum_j \Big[\Big(\frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_k\, \partial q_i}\Big) P_j + \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_j}{\partial q_k}\Big] \\ \frac{\partial A_k}{\partial q_i} &= -\sum_j \Big[\Big(\frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_i\, \partial q_k}\Big) P_j + \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_i}\Big] \end{aligned}$$

Si calculamos la diferencia entre ellas obtenemos que es proporcional a un paréntesis de Lagrange

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i} = [q_k, q_i]_{(Q,P)}$$

(b) Las derivadas de las funciones B_i con respecto a los momentos p_k vienen dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_i}{\partial p_k} &= -\sum_j \Big[\Big(\frac{\partial^2 Q_j}{\partial p_k\, \partial p_i}\Big) P_j + \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial P_j}{\partial p_k}\Big] \,, \\ \frac{\partial B_k}{\partial p_i} &= -\sum_j \Big[\Big(\frac{\partial^2 Q_j}{\partial p_i\, \partial p_k}\Big) P_j + \frac{\partial P_j}{\partial p_i}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k}\Big] \,, \end{aligned}$$

y si, al igual que antes, calculamos la diferencia entre estas dos derivadas obtenemos un paréntesis de Lagrange

$$\frac{\partial B_i}{\partial p_k} - \frac{\partial B_k}{\partial p_i} = [p_k, p_i]_{(Q,P)} \,.$$

(c) Análogamente, se obtiene

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_k} - \frac{\partial B_k}{\partial q_i} = \delta_{ik} - [q_k, p_i]_{(Q,P)} \,.$$

En resumen hemos obtenido que, si la transformación es canónica, se cumplen las siguientes relaciones

$$(i) \quad \frac{\partial A_i}{\partial q_k} = \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \,, \qquad (ii) \quad \frac{\partial B_i}{\partial p_k} = \frac{\partial B_k}{\partial p_i} \,, \qquad (iii) \quad \frac{\partial A_i}{\partial p_k} = \frac{\partial B_k}{\partial q_i} \,.$$

Estas tres relaciones pueden ser englobadas en una única relación utilizando la notación griega. Si denotamos Φ_α por las $2n$ funciones $\Phi_\alpha = (A_i, B_j)$, entonces obtenemos

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \xi_\beta} = \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \xi_\alpha} \,, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n,$$

lo que indica la existencia de una función F tal que $\Phi_\alpha = \partial F/\partial \xi_\alpha$ o, en la notación tradicional,

$$A_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}\,, \quad B_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}\,.$$

Por consiguiente, la función S resulta ser de la siguiente forma

$$S = \sum_i \Big(\frac{\partial F}{\partial q_i}\Big)\dot{q}_i + \sum_i \Big(\frac{\partial F}{\partial p_i}\Big)\dot{p}_i = \frac{d}{dt}F\,.$$

Finalmente, hemos obtenido el siguiente resultado

$$\sum_i p_i\dot{q}_i - \sum_i P_i\dot{Q}_i = \frac{d}{dt}F\,.$$

Esta expresión se puede escribir también utilizando diferenciales. Utilizando esta notación esta propiedad queda de la siguiente forma

$$\sum_i p_i\, dq_i - \sum_i P_i\, dQ_i = dF\,.$$

6.2.2 Caso dependiente del tiempo

Consideremos ahora el comportamiento de la función S en el caso más general de transformaciones $(q,p) \to (Q,P)$ dependientes del tiempo; en este caso las nuevas coordenadas Q_j y momentos P_j son funciones de la forma

$$Q_j = Q_j(q,p,t)\,, P_j = P_j(q,p,t)\,.$$

La derivada de Q_j con respecto a t vendrá dada por

$$\dot{Q}_j = \sum_i \Big(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\Big)\dot{q}_i + \sum_i \Big(\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\Big)\dot{p}_i + \frac{\partial Q_j}{\partial t}\,,$$

con lo que la función S, que recordemos había sido definida como

$$S = \sum_i p_i\dot{q}_i - \sum_j P_j\dot{Q}_j\,,$$

queda de la siguiente forma

$$S = \sum_i A_i\dot{q}_i - \sum_i B_i\dot{p}_i + C\,,$$

donde las funciones A_i, B_i, y C vienen dadas por

$$A_i = p_i - \sum_j \Big(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\Big)P_j\,, \qquad B_i = -\sum_j \Big(\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\Big)P_j\,, \qquad C = -\sum_j \Big(\frac{\partial Q_j}{\partial t}\Big)P_j\,.$$

Nos proponemos demostrar que, si la transformación es canónica, entonces S posee propiedades particularmente interesantes. Para ello estudiaremos las relaciones entre las funciones A_i, B_i, y C.

Los resultados de los cálculos realizados en los apartados (a), (b), y (c), anteriormente estudiados en el caso independiente del tiempo, siguen siendo válidos. Por lo que podemos afirmar la existencia de una función F tal que $\Phi_\alpha = \partial F/\partial \xi_\alpha$ o, en la notación tradicional,

$$A_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}\,, \quad B_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}\,.$$

Hasta ahora no hemos tenido en cuenta la función C. Esta función está relacionada con la posible dependencia de las funciones A_i y B_i con respecto al tiempo.

(d) Teniendo en cuenta las siguientes derivadas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_i}{\partial t} &= -\sum_j \Big[\Big(\frac{\partial^2 Q_j}{\partial t\,\partial q_i}\Big)P_j + \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_j}{\partial t}\Big]\,,\\
\frac{\partial C}{\partial q_i} &= -\sum_j \Big[\Big(\frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_i\,\partial t}\Big)P_j + \frac{\partial Q_j}{\partial t}\frac{\partial P_j}{\partial q_i}\Big]\,,
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial q_i} = \sum_j \Big(\frac{\partial Q_j}{\partial t}\frac{\partial P_j}{\partial q_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_j}{\partial t}\Big)\,.$$

Recordando que las derivadas de Q y P con respecto al tiempo se pueden expresar de la forma

$$\dot{Q}_j = \{Q_j, H\} + \frac{\partial Q_j}{\partial t}\,, \quad \dot{P}_j = \{P_j, H\} + \frac{\partial P_j}{\partial t}\,,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial q_i} &= \sum_j \Big(\dot{Q}_j - \{Q_j, H\}\Big)\frac{\partial P_j}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\Big(\dot{P}_j - \{P_j, H\}\Big)\\
&= \sum_j \Big(\frac{\partial K}{\partial P_j} - \{Q_j, H\}\Big)\frac{\partial P_j}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\Big(\frac{\partial K}{\partial Q_j} + \{P_j, H\}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Agrupando términos

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial q_i} = \frac{\partial K}{\partial q_i} - \sum_j \{Q_j, H\}\frac{\partial P_j}{\partial q_i} + \sum_j \{P_j, H\}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$$

y desarrollando los paréntesis de Poisson llegamos a

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial q_i} = \frac{\partial K}{\partial q_i} + \sum_r \Big([p_r, q_i]\frac{\partial H}{\partial q_r} - [q_r, q_i]\frac{\partial H}{\partial p_r}\Big) = \frac{\partial K}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

que finalmente se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\Big(C - H + K - \frac{\partial F}{\partial t}\Big) = 0\,.$$

(e) Análogamente se demuestra que

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial p_i} = \sum_j \Big(\frac{\partial Q_j}{\partial t}\frac{\partial P_j}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial P_j}{\partial t}\Big)\,,$$

lo que conduce a

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial p_i} = \frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\,,$$

de lo que se deduce

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\Big(C - H + K - \frac{\partial F}{\partial t}\Big) = 0\,.$$

Estas dos propiedades indican que la expresión que figura entre paréntesis es independiente de las coordenadas q_i y de los momentos p_i y, por consiguinte, sólo puede depender del tiempo t. Dado que un Hamiltoniano está definido salvo una función aditiva del tiempo, que no influye en las ecuaciones, se deduce que la función C viene dada por

$$C = H - K + \frac{\partial F}{\partial t}\,.$$

y que por consiguiente la función S resulta ser de la siguiente forma

$$S = \sum_i \Big(\frac{\partial F}{\partial q_i}\Big)\dot{q}_i + \sum_i \Big(\frac{\partial F}{\partial p_i}\Big)\dot{p}_i + H - K + \frac{\partial F}{\partial t} = H - K + \frac{d}{dt}F\,.$$

Finalmente, hemos obtenido el siguiente resultado

$$\Big(\sum_i p_i\dot{q}_i - H\Big) - \Big(\sum_i P_i\dot{Q}_i - K\Big) = \frac{d}{dt}F\,.$$

En resumen hemos obtenido una nueva forma de caracterizar las transformaciones canónicas

Una transformación $(q,p) \to (Q,P)$ del Espacio de fases de los momentos T^*Q es transformación canónica si y solo si existe una función F tal que

$$\Big(\sum_i \dot{q}_i p_i - H\Big) - \Big(\sum_i \dot{Q}_i P_i - K\Big) = \frac{d}{dt}F\,.$$

La función F se denomina *función generatriz* de la transformación canónica.

6.3 Función generatriz II : Métodos variacionales

Recordemos que las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}\,,$$

se pueden obtener como las ecuaciones de Euler asociadas al principio de Hamilton modificado que es el nombre que recibe el problema variacional consistente en buscar las $2n$ funciones $q_i(t), p_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, que hacen extremal el funcional

$$S[q(t), p(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, p, \dot{p}, t)\, dt\,,$$

donde la función $\mathcal{L}$ viene dada por

$$\mathcal{L} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)\,.$$

Consideremos una transformación $(q, p) \to (Q, P)$ y supongamos que las nuevas coordenadas son canónicas. Entonces existe una función $K(Q, P, t)$ que representa el Hamiltoniano para las nuevas ecuaciones

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}\,, \quad \dot{P}_i = \frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

y, puesto que estas nuevas ecuaciones son también Hamiltonianas, podrán ser obtenidas por un procedimiento variacional

$$S'[Q(t), P(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(Q, \dot{Q}, P, \dot{P}, t)\, dt$$

donde la función $\mathcal{L}$ viene dada por

$$\mathcal{L}' = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)\,.$$

Dado que Q_i y P_i son funciones de q_j y p_j, la función $\mathcal{L}'$ puede ser considerada también como función de q_j y p_j. Esto significa que $\mathcal{L}'$ da lugar a las siguientes ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_r}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_r} = 0\,, \qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{p}_r}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial p_r} = 0\,.$$

Analicemos, en primer lugar, la primera de estas ecuaciones. Las derivadas vienen dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_r} \;=\; \sum_i \Big(\frac{\partial P_i}{\partial q_r}\Big)\dot{Q}_i + \sum_i P_i \Big(\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial q_r}\Big) - \frac{\partial K}{\partial q_r}\,,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_r} = \sum_i P_i \Big(\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \dot{q}_r} \Big) ,$$

teniendo en cuenta las igualdades

$$\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_r} , \quad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \dot{q}_r} \Big) = \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial q_r} ,$$

la ecuación de Euler de $\mathcal{L}'$ con respecto a q_r queda de la forma

$$\sum_i \Big[\Big(\frac{\partial Q_i}{\partial q_r} \Big) \dot{P}_i - \Big(\frac{\partial P_i}{\partial q_r} \Big) \dot{Q}_i \Big] = - \frac{\partial K}{\partial q_r} .$$

Sustituyendo $\dot{Q}_i$ y $\dot{P}_i$ por las expresiones desarrolladas

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \sum_s \Big(\frac{\partial Q_i}{\partial q_s} \Big) \dot{q}_s + \sum_s \Big(\frac{\partial Q_i}{\partial p_s} \Big) \dot{p}_s + \frac{\partial Q_i}{\partial t} , \\ \dot{P}_i &= \sum_s \Big(\frac{\partial P_i}{\partial q_s} \Big) \dot{q}_s + \sum_s \Big(\frac{\partial P_i}{\partial p_s} \Big) \dot{p}_s + \frac{\partial P_i}{\partial t} , \end{aligned}$$

obtenemos

$$\sum_s [q_r, q_s]_{(Q,P)} \dot{q}_s + \sum_s [q_r, p_s]_{(Q,P)} \dot{p}_s + \sum_i \Big(\frac{\partial Q_i}{\partial q_r} \frac{\partial P_i}{\partial t} - \frac{\partial Q_i}{\partial t} \frac{\partial P_i}{\partial t q_r} \Big) = - \frac{\partial K}{\partial q_r} .$$

Finalmente, teniendo en cuenta que si la transformación es canónica se debe cumplir

$$\begin{aligned} &(i) \qquad [q_r, q_s]_{(Q,P)} = 0 , \qquad (ii) \quad [q_r, p_s]_{(Q,P)} = \delta_{rs} , \\ &(iii) \qquad \sum_i \Big(\frac{\partial Q_i}{\partial q_r} \frac{\partial P_i}{\partial t} - \frac{\partial Q_i}{\partial t} \frac{\partial P_i}{\partial t q_r} \Big) = \frac{\partial}{\partial q_r} (H - K) , \end{aligned}$$

llegamos a

$$\dot{p}_r = - \frac{\partial H}{\partial q_r} , \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$

Repitiendo el procedimiento anterior con el segundo grupo de ecuaciones de Euler, correspondiente a las variables p_r, se comprueba que conduce a

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r} , \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$

Puesto que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son funciones distintas que conducen a las mismas ecuaciones deben ser, a lo sumo, gauge equivalentes; esto es, difieren a lo sumo en la derivada total con repecto al tiempo de una cierta función (independiente de las $\dot{q}_r$ y $\dot{p}_r$). Esto significa que debe existir una función $F = F(q, p, t)$ tal que

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} F .$$

Por supuesto, esta función F es la misma función F previamente obtenida en la Sec. (6.2) y que denominamos función generatriz.

6.4 Funciones generatrices de tipo F_1, F_2, F_3, y F_4

6.4.1 Introducción

Hemos demostrado que si una transformación $(q,p) \to (Q,P)$ es canónica entonces existe una función asociada F denominada función generatriz. Recíprocamente, conocida F podemos determinar la transformación canónica generada por esta función. En la práctica, lo que hace F es generar las ecuaciones que relacionan las $2n$ nuevas coordenadas (Q_j, P_j) con las $2n$ antiguas coordenadas

$$F \quad \to \quad Q_j = Q_j(q,p,t)\,,\ P_j = P_j(q,p,t)\,.$$

Esto puede interpretarse como que F es una función que depende de $4n$ variables en total ($4n+1$ si incluimos el tiempo); sin embargo, conviene recordar que solo $2n$ de estas $4n$ variables son independientes. Es claro que hay varias formas de escoger un conjunto de $2n$ variables independientes y, como consecuencia de ello, hay varias formas de presentar la función F.

En lo sucesivo utilizaremos la siguiente notación

$$F_1(q,Q,t)\,, \quad F_2(q,P,t)\,, \quad F_3(p,Q,t)\,, \quad F_4(p,P,t)\,.$$

6.4.2 Transformaciones canónicas generadas por F_1

Se denota por F_1 a la función generatriz F cuando se expresa como función de las antiguas coordenadas q_i y las nuevas coordenadas Q_j, esto es,

$$F_1 = F_1(q,Q,t)\,.$$

Consideremos, como punto de partida, la siguiente expresión

$$\Big(\sum_i p_i\dot{q}_i - H\Big) - \Big(\sum_i P_i\dot{Q}_i - K\Big) = \frac{d}{dt}F_1\,.$$

Teniendo en cuenta que la derivada de F_1 con respecto al tiempo viene dada por

$$\frac{d}{dt}F_1 = \sum_i\Big(\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\Big)\dot{q}_i + \sum_i\Big(\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\Big)\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}\,,$$

obtenemos que la igualdad anterior se convierte en

$$\sum_i\Big(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\Big)\dot{q}_i - \sum_i\Big(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\Big)\dot{Q}_i = H - K + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

que, cuando se utilizan diferenciales, queda de la siguiente forma

$$\sum_i\Big(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\Big)\,dq_i - \sum_i\Big(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\Big)\,dQ_i - \Big(H - K + \frac{\partial F_1}{\partial t}\Big)\,dt = 0\,.$$

En este primer caso se supone que las $2n+1$ variables (q_i, Q_i, t) son independientes; por consiguiente, la expresión anterior solo puede ser nula si se anulan por separado cada uno de los $2n+1$ coeficientes. El resultado es que se tienen que cumplir las siguientes igualdades

$$(i)\ p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\,, \quad (ii)\ P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\,, \quad (iii)\ K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}\,.$$

El grupo (i) de ecuaciones nos da los valores de p_i como función q_i, Q_i y t. Por el teorema de la función implícita si se cumple la siguiente condición

$$\det\Big[\frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\Big] = \det\Big[\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j\,\partial q_i}\Big] \neq 0\,,$$

entonces es posible resolver las funciones $p_i = p_i(q, Q, t)$ para Q_i y obtener $Q_i = Q_i(q, p, t)$. Una vez conocidos estas funciones, el grupo (ii) permite obtener $P_i = P_i(q, p, t)$. Finalmente, la relación (iii) nos indica el valor del nuevo Hamiltoniano.

6.4.3 Transformaciones canónicas generadas por F_2

Se denota por F_2 a la función generatriz F cuando se expresa como función de las antiguas coordenadas q_i y los nuevos momentos P_j, esto es,

$$F_2 = F_2(q, P, t)\,.$$

Las ecuaciones asociadas a F_2 se pueden obtener utilizando como punto de partida las propiedades de F_1 y utilizando la transformación de Legendre para construir $F_2(q, P, t)$ a partir de $F_1(q, Q, t)$

$$(q, Q, t) \to (q, P, t)\,, \quad F_1 \mapsto F_2 = F_1 - \sum_i \Big(\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\Big) Q_i\,.$$

Si tenemos en cuenta que $\partial F_1/\partial Q_i = -P_i$, obtenemos que la relación entre F_1 y F_2 es de la forma

$$F_2 = F_1 + \sum_i P_i Q_i\,.$$

Por consiguiente, se debe cumplir

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt}\Big(F_2 - \sum_i P_i Q_i\Big)\,,$$

lo que conduce a

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = -\sum_i Q_i \dot{P}_i - K + \frac{d}{dt} F_2\,.$$

La derivada de F_2 con respecto al tiempo viene dada por

$$\frac{d}{dt} F_2 = \sum_i \Big(\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\Big)\dot{q}_i + \sum_i \Big(\frac{\partial F_2}{\partial P_i}\Big)\dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}\,,$$

de lo que se deduce que

$$\sum_i \Big(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\Big)\dot{q}_i + \sum_i \Big(Q_i - \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\Big)\dot{P}_i = H - K + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

que, cuando se utilizan diferenciales, queda de la siguiente forma

$$\sum_i \Big(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\Big)\, dq_i + \sum_i \Big(Q_i - \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\Big)\, dP_i - \Big(H - K + \frac{\partial F_2}{\partial t}\Big)\, dt = 0\,.$$

En este segundo caso se supone que las $2n+1$ variables (q_i, P_i, t), son independientes, por consiguiente la expresión anterior solo puede ser nula si se anulan por separado los $2n+1$ coeficientes. El resultado es que se tienen que cumplir las siguientes igualdades

$$(i)\ p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\,, \quad (ii)\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\,, \quad (iii)\ K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}\,.$$

Empecemos considerando las relaciones (i). Si F_2 es tal que se cumple la siguiente condición

$$\det\Big[\frac{\partial p_i}{\partial P_j}\Big] = \det\Big[\frac{\partial^2 F_2}{\partial P_j\, \partial q_i}\Big] \neq 0\,,$$

entonces es posible resolver las funciones $p_i = p_i(q, P, t)$ para P_i y obtener $P_i = P_i(q, p, t)$. Una vez conocidos estas funciones, el grupo (ii) permite obtener $Q_i = Q_i(q, p, t)$. De nuevo, la relación (iii) nos indica el valor del nuevo Hamiltoniano.

6.4.4 Transformaciones canónicas generadas por F_3

Se denota por F_3 a la función generatriz F cuando se expresa como función de las antiguos momentos p_i y las nuevas coordenadas Q_j, esto es,

$$F_3 = F_3(p, Q, t)\,.$$

Al igual que en el caso anterior podemos introducir el cambio $(q, Q, t) \to (p, Q, t)$ utilizando la transformación de Legendre

$$(q, Q, t) \to (p, Q, t)\,, \quad F_1 \mapsto F_3 = F_1 - \sum_i \Big(\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\Big) q_i\,.$$

Se debe cumplir

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt}\Big(F_3 + \sum_i p_i q_i\Big)\,,$$

lo que conduce a

$$-\sum_i q_i \dot{p}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt} F_3\,.$$

Teniendo en cuenta que la derivada de F_3 con respecto al tiempo viene dada por

$$\frac{d}{dt}F_3 = \sum_i \Big(\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}\Big)\dot{Q}_i + \sum_i \Big(\frac{\partial F_3}{\partial p_i}\Big)\dot{p}_i + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

obtenemos

$$\sum_i \Big(q_i + \frac{\partial F_3}{\partial p_i}\Big)\dot{p}_i + \sum_i \Big(Q_i + \frac{\partial F_3}{\partial Q_i}\Big)\dot{Q}_i + H - K + \frac{\partial F_3}{\partial t} = 0$$

que también se puede escribir de la siguiente forma

$$\sum_i \Big(q_i + \frac{\partial F_3}{\partial pi}\Big)\, dp_i + \sum_i \Big(P_i + \frac{\partial F_3}{\partial Q_i}\Big)\, dQ_i + \Big(H - K + \frac{\partial F_3}{\partial t}\Big)\, dt = 0\,.$$

El resultado es que en este tercer caso las ecuaciones de la transformación son

$$(i)\ q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}\,, \quad (ii)\ P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}\,, \quad (iii)\ K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}\,.$$

Como en los dos casos anteriores, las ecuaciones (i) permiten obtener $Q_i = Q_i(q, p, t)$ (siempre que se cumpla la condición $\det[\partial^2 F_3/\partial Q_j \partial p_i] \neq 0$), y posteriormente as ecuaciones (ii) nos suministra los nuevos momentos P_i en función de las antiguas variables. Al igual que en los dos casos anteriores, la relación (iii) nos indica el valor del nuevo Hamiltoniano.

6.4.5 Transformaciones canónicas generadas por F_4

Se denota por F_4 a la función generatriz F cuando se expresa como función de las antiguos momentos p_i y las nuevos momentos P_j, esto es,

$$F_4 = F_4(p, P, t)\,.$$

En este caso, la transición $(q, Q) \to (p, P)$ se puede estudiar utilizando una doble transformación de Legendre

$$(q, Q, t) \to (p, P, t)\,, \quad F_1 \mapsto F_4 = F_1 - \sum_i \Big(\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\Big)Q_i - \sum_i \Big(\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\Big)q_i\,.$$

Por consiguiente se debe cumplir la siguiente igualdad

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt}\Big(F_4 - \sum_i P_i Q_i + \sum_i p_i q_i\Big)\,,$$

lo que conduce a

$$-\sum_i q_i \dot{p}_i - H = -\sum_i Q_i \dot{P}_i - K + \frac{d}{dt}F_4\,.$$

Teniendo en cuenta que la derivada de F_4 con respecto al tiempo viene dada por

$$\frac{d}{dt}F_4 = \sum_i \Big(\frac{\partial F_4}{\partial p_i}\Big)\dot{p}_i + \sum_i \Big(\frac{\partial F_4}{\partial P_i}\Big)\dot{P}_i + \frac{\partial F_4}{\partial t}\,,$$

obtenemos

$$\sum_i \Big(q_i + \frac{\partial F_4}{\partial p_i}\Big)\dot{p}_i - \sum_i \Big(Q_i - \frac{\partial F_4}{\partial P_i}\Big)\dot{P}_i + H - K + \frac{\partial F_4}{\partial t} = 0\,,$$

que también se puede escribir de la siguiente forma

$$\sum_i \Big(q_i + \frac{\partial F_4}{\partial p_i}\Big)\, dp_i - \sum_i \Big(Q_i - \frac{\partial F_4}{\partial P_i}\Big)\, dP_i + \Big(H - K + \frac{\partial F_4}{\partial t}\Big)\, dt = 0\,.$$

Este cuarto caso conduce a las siguientes relaciones

$$(i)\ q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}\,, \quad (ii)\ Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}\,, \quad (iii)\ K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}\,,$$

que, al igual que en los tres casos anteriores, permiten obtener Q_i y P_i en función de las antiguas variables.

La siguiente Tabla I resume los resultados obtenidos en las cuatro situaciones:

Función F	q_i	p_i	Q_i	P_i
$F_1(q,Q)$	—	$\frac{\partial F_1}{\partial q_i}$	—	$-\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$
$F_2(q,P)$	—	$\frac{\partial F_2}{\partial q_i}$	$\frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	—
$F_3(Q,p)$	$-\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$	—	—	$-\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$
$F_4(p,P)$	$-\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$	—	$\frac{\partial F_4}{\partial P_i}$	—

Tabla I. Tabla-Resumen de las propiedades de los cuatro tipos de funciones generatrices.

6.4.6 Dependencia temporal

Es de resaltar que, en los cuatro casos, el nuevo Hamiltoniano K se obtiene a partir del Hamiltoniano antiguo H más un término adicional que representa la derivada parcial de la función F con respecto al tiempo

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}\,, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}\,, \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}\,, \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}\,.$$

Estas cuatro ecuaciones se pueden resumir en una única fórmula

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F_j}{\partial t}\,, \quad j = 1,2,3,4.$$

Si la función generatriz F es independiente del tiempo entonces el nuevo Hamiltoniano K coincide con el antiguo. Esto es,

$$Si \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad entonces \quad K = H.$$

6.5 Funciones generatrices: Estudio de varios casos particulares

6.5.1 Caso particular no. 1 : Una función generatriz de tipo F_1

Consideremos la siguiente función generatriz de tipo F_1

$$F_1 = \sum_j q_j Q_j\,.$$

Las ecuaciones de la transformación generada por esta función son

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i\,, \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i\,, \qquad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = H\,.$$

Por consiguiente

La función $F_1 = \sum q_j Q_j$ intercambia posiciones con momentos pero introduciendo un signo menos.

Dos comentarios parecen oportunos. Primero, el carácter abstracto del formalismo Hamiltoniano conduce a que lo que antes era posición pase a ser momento y recíprocamente. Estos cambios tan amplios no eran posibles en el formalismo Lagrangiano. Segundo, la aparición del signo negativo es fundamental y se puede considerar como una consecuencia del carácter antisimétrico de los paréntesis de Poisson.

6.5.2 Caso particular no. 2 : Una función generatriz de tipo F_2 relacionada con la Identidad

Consideremos la siguiente función generatriz de tipo F_2

$$F_2 = \sum_j q_j P_j \,.$$

Las ecuaciones de la transformación generada por esta función son

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i \,, \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i \,, \qquad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H \,.$$

Por consiguiente

La función $F_2 = \sum q_j P_j$ genera la transformación identidad.

Recordemos que aunque la transformación identidad pueda ser considerada como una transformación canónica trivial (las ecuaciones y los paréntesis de Poisson no sufren cambios) juega un papel importante ya que es el elemento neutro necesario para la estructura de grupo.

6.5.3 Caso particular no. 3 : Una función generatriz de tipo F_2 relacionada con las transformaciones puntuales

Consideremos la siguiente función generatriz de tipo F_2

$$F_2 = \sum_j f_j(q_1, q_2, \ldots, q_n) P_j \,.$$

Las ecuaciones de la transformación generada por esta función son

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \sum_j \Big(\frac{\partial f_j}{\partial q_i}\Big) P_j \,, \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) \,.$$

Recordemos que en el formalismo Lagrangiano las transformaciones $(q_i, v_i) \to (Q_i, V_i)$ definidas de la forma $Q_i = f_i(q), V_i = \sum(\partial Q_i/\partial q_j) v_j$ eran denominadas transformaciones puntuales. Por consiguiente

Las transformaciones en el espacio de configuración de la forma $q_i \to Q_i = f_i(q)$ determinan transformaciones puntuales en el espacio de fases T^*Q que son transformaciones canónicas generadas por funciones F_2 de la forma $F_2 = \sum f_j(q) P_j$.

Una generalización inmediata vendría dada por

$$F_2 = \sum_j f_j(q_1, q_2, \ldots, q_n) P_j + g(q_1, q_2, \ldots, q_n) \,,$$

que conduciría a las siguientes leyes de transformación

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \sum_j \Big(\frac{\partial f_j}{\partial q_i}\Big) P_j + \frac{\partial g}{\partial q_i}\,, \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q_1, q_2, \ldots, q_n)\,.$$

La ley de transformación de las q_i sería la misma que en el caso anterior pero la ley de las p_i contiene un término adicional; se trata de una transformación lineal no homogénea.

6.5.4 Caso particular no. 4 : Una función generatriz de tipo F_2 relacionada con las rotaciones

Un tipo especial de la función F_2 del apartado anterior es

$$F_2 = \sum_{r\,s} a_{rs} q_s P_r\,,$$

donde la matriz $A = [a_{ik}]$ es una matriz ortogonal representando una rotación

$$\sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}\,.$$

Las ecuaciones de la transformación generada por esta función son

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \sum_r a_{ri} P_r\,, \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = \sum_s a_{is} q_s\,.$$

En este caso es fácil despejar los nuevos momentos. Teniendo en cuenta

$$\sum_k a_{ik} p_k = \sum_{k\,r} a_{ik} a_{rk} P_r = \sum_r \delta_{ir} P_r = P_i\,,$$

obtenemos

$$Q_i = \sum_k a_{ik} q_k\,, \qquad P_i = \sum_k a_{ik} p_k\,.$$

Si las q_i sufren una rotación entonces los momentos p_i también sufren una rotación. Por consiguiente

> *Las rotaciones en el espacio de configuración Q determinan transformaciones canónicas en el espacio de fases T^*Q generadas por funciones F_2 de la forma $F_2 = \sum a_{rs} q_s P_r$.*

Capítulo 7

Funciones generatrices II

1. Introducción
2. Teorema de Liouville para transformaciones canónicas
3. Familias de transformaciones canónicas
4. Familias de transformaciones canónicas II

7.1 Introducción

7.2 Teorema de Liouville para transformaciones canónicas

Consideremos una transformación $(q, p) \to (Q, P)$ del espacio de fases T^*Q y denotemos por J el Jacobiano (determinante de la matriz Jacobiana) de la transformación

$$J = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} \, .$$

Demostraremos en esta sección que si la transformación es canónica entonces el Jacobiano J vale la unidad. Demostraremos dos veces esta propiedad utilizando dos procedimientos similares pero algo distintos. Primero supondremos que la función generatriz es de tipo F_1 y luego supondremos que F es de tipo F_2.

7.2.1 Método I: Función F_1

Consideremos una transformación canónica generada por una función de tipo F_1

El Jacobiano J puede ser calculado de la siguiente forma. Primero introducimos un sistema intermedio (q_i, Q_i) de tal forma que la transformación $(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$ se descompone en la aplicación sucesiva de dos transformaciones que indicaremos de la siguiente forma

$$(q_i, p_i) \to (q_i, Q_i) \to (Q_i, P_i)\,.$$

De esta modo J se descompone en el producto de los dos Jacobianos parciales

$$J = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,Q)}\;\frac{\partial(q,Q)}{\partial(q,p)} = \frac{\partial(Q,P)/\partial(q,Q)}{\partial(q,p)/\partial(q,Q)}\,,$$

donde hemos utilizado la propiedad $\partial(q,Q)/\partial(q,p) = (\partial(q,p)/\partial(q,Q))^{-1}$. Por consiguiente, J aparece como el cociente de dos determinantes que vienen dados por

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,Q)} = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \dfrac{\partial Q_i}{\partial Q_j} \\ \dfrac{\partial P_i}{\partial q_j} & \dfrac{\partial P_i}{\partial Q_j} \end{bmatrix}\,, \quad \frac{\partial(q,p)}{\partial(q,Q)} = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial q_i}{\partial q_j} & \dfrac{\partial q_i}{\partial Q_j} \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial q_j} & \dfrac{\partial p_i}{\partial Q_j} \end{bmatrix}\,.$$

El cálculo es sencillo si se tiene en cuenta que

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}\,, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial Q_j} = \delta_{ij}\,,$$

lo que conduce a

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,Q)} = (-1)^n \det\Big[\,\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\,\Big]\,, \quad \frac{\partial(q,p)}{\partial(q,Q)} = \det\Big[\,\frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\,\Big]\,,$$

con lo que J queda de la forma

$$J = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = (-1)^n\,\frac{\det\Big[\,\partial P_i/\partial q_j\,\Big]}{\det\Big[\,\partial p_i/\partial Q_j\,\Big]}\,.$$

Finalmente, sustituyendo P_i y p_i por sus expresiones a partir de F_1

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\,, \quad P_i = -\,\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\,,$$

se obtiene el siguiente resultado

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \frac{\det\Big[\,\partial^2 F_1/\partial Q_i \partial q_j\,\Big]}{\det\Big[\,\partial^2 F_1/\partial q_i \partial Q_j\,\Big]} = 1\,.$$

7.2.2 Método II: Función F_2

Consideremos una transformación canónica generada por una función de tipo F_2

En este caso resulta conveniente utilizar las variables (q_i, P_i) como variables intermedias

$$(q_i, p_i) \to (q_i, P_i) \to (Q_i, P_i)\,.$$

y consecuentemente el Jacobiano J puede ser escrito de la forma

$$J = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,P)}\,\frac{\partial(q,P)}{\partial(q,p)} = \frac{\partial(Q,P)/\partial(q,P)}{\partial(q,p)/\partial(q,P)}\,,$$

y los dos Jacobianos parciales vienen dados por

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,P)} = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \dfrac{\partial Q_i}{\partial P_j} \\ \dfrac{\partial P_i}{\partial q_j} & \dfrac{\partial P_i}{\partial P_j} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial(q,p)}{\partial(q,P)} = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial q_i}{\partial q_j} & \dfrac{\partial q_i}{\partial P_j} \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial q_j} & \dfrac{\partial p_i}{\partial P_j} \end{bmatrix}.$$

De nuevo el cálculo resulta relativamente sencillo teniendo en cuenta que aparcen términos de la forma $\partial q_i/\partial q_j$ y $\partial P_i/\partial P_j$. De esta forma se obtiene

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,P)} = \det\Big[\,\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\,\Big], \quad \frac{\partial(q,p)}{\partial(q,P)} = \det\Big[\,\frac{\partial p_i}{\partial P_j}\,\Big],$$

con lo que J queda de la forma

$$J = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \frac{\det\Big[\,\partial Q_i/\partial q_j\,\Big]}{\det\Big[\,\partial p_i/\partial P_j\,\Big]}\,.$$

Finalmente, relacionando Q_i y p_i con la función F_2 se obtiene el siguiente resultado

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \frac{\det\Big[\,\partial^2 F_2/\partial P_i \partial q_j\,\Big]}{\det\Big[\,\partial^2 F_2/\partial q_i \partial P_j\,\Big]} = 1\,.$$

En resumen, hemos demostrado, utilizando primero F_1 y luego F_2, que el Jacobiano J vale la unidad y que, por consiguiente,

Las transformaciones canónicas preservan el volumen del espacio de fases.

Este resultado es conocido como el *teorema de Liouville para transformaciones canónicas.*

7.3 Familias de transformaciones canónicas I

El objetivo de esta sección es el estudio de familias de transformaciones que dependen de una forma continua de un cierto parámetro que denotaremos por θ.

7.3.1 Grupos uni-paramétricos de transformaciones

Denominaremos familia uni-paramétrica de transformaciones del espacio de fases T^*Q, a una aplicación Φ de $T^*Q \times \mathbb{R}$ en T^*Q

$$\Phi \,:\, T^*Q \times \mathbb{R} \to T^*Q\,, \quad (q,p,\theta) \mapsto (Q,P) = \Phi(q,p,\theta)$$

tal que se cumple que la aplicación Φ_θ definida de la forma

$$\Phi_\theta \,:\, T^*Q \to T^*Q\,, \quad (q,p) \mapsto \Phi_\theta(q,p) = \Phi(q,p,\theta)$$

es una transformación canónica para todo valor del parámetro $\theta \in \mathbb{R}$; esto significa que la transformación Φ_θ preserva los P. de P. fundamentales para todos los valores de θ (en muchos casos θ esta definido en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ pero, por comodidad de la notación, supondremos el caso general de que θ puede recorrer todo $\mathbb{R}$).

Además supondremos que esta familia tiene estructura de grupo uni-paramétrico. Esto significa que

(i) La transformación Φ_θ se reduce a la identidad cuando $\theta = 0$

$$\Phi_0(q,p) = (q,p)\,.$$

(ii) Existe la transformación inversa $\Phi_\theta^{-1} : T^*Q \to T^*Q$ tal que $\Phi_\theta^{-1}[\Phi_\theta(q,p)] = (q,p)$. Además esta transformación inversa, que también es transformación canónica, pertenece a la familia.

(iii) La aplicación sucesiva de dos transformaciones de esta familia es una nueva transformación que también pertenece a la familia.

$$\Phi_{\theta_2}[\Phi_{\theta_1}(q,p)] = \Phi_{\theta_1+\theta_2}(q,p)\,.$$

En coordenadas, escribiremos

$$Q_i = Q_i(q,p,\theta)\,, \quad P_i = P_i(q,p,\theta)\,, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

de tal forma que para pequeños valores de θ la transformación Φ estará representada por unas ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \theta\, a_i(q,p) \\ P_i &= p_i + \theta\, b_i(q,p) \end{aligned}$$

donde las funciones a_i y b_i vienen dadas por

$$a_i = \left[\frac{dQ_i}{d\theta}\right]_{\theta=0}, \quad b_i = \left[\frac{dP_i}{d\theta}\right]_{\theta=0}.$$

Una transformación $(q,p) \to (Q,P)$ causada por un cambio pequeño de θ, y cuyas ecuaciones pueden ser descritas en primer orden de θ, se suele denominar transformación infinitesimal.

Recordemos que la función $F_2 = \sum_j q_j P_j$ genera la transformación identidad. Por consiguiente parece lógico suponer que una familia uniparámetrica de transformaciones canónicas que reduce a la identidad cuando $\theta = 0$ admite como función generatriz una función de tipo F_2 de la forma

$$F_2(q,P,\theta) = \sum_j q_j P_j + \theta\, W(q,P,\theta)\,,$$

de tal forma que las ecuaciones de la transformación son

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \theta\left(\frac{\partial W}{\partial P_i}\right), \qquad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \theta\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right).$$

En primer orden del parámetro θ las ecuaciones anteriores quedan de la forma

$$Q_i = q_i + \theta\left(\frac{\partial G}{\partial p_i}\right), \qquad P_i = p_i - \theta\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\right),$$

donde la función G, que viene dada por

$$G = \left[\,\frac{dF_2}{d\theta}\,\right]_{\theta=0} = \lim_{\theta\to 0} W(q,P,\theta)\,,$$

se denomina generador (o generador infinitesimal) de la familia θ-dependiente de transformaciones canónicas. Conviene resaltar que hemos utilizado la propiedad $(Q,P) \to (q,p)$ cuando $\theta \to 0$. Asimismo conviene resaltar la función generatriz F_2 y el generador G están relacionadas pero son funciones distintas.

Los resultados anteriores nos dan las ecuaciones de la transformación $(q,p) \to (Q,P)$ cuando θ sufre cambios muy pequeños pero, como hemos supuesto que esta familia tiene estructura de grupo, toda transformación finita se puede considerar como una aplicación sucesiva transformaciones infinitesimales asociadas a pequeños valores de θ.

Si consideramos Q y P como funciones de θ entonces los cambios que sufren cuando θ cambian vienen dados por las siguientes ecuaciones

$$\frac{dQ}{d\theta} = \frac{\partial G}{\partial P}\,, \quad \frac{dP}{d\theta} = -\,\frac{\partial G}{\partial Q}\,.$$

Lo realmente interesante de estas ecuaciones es que son ecuaciones de tipo Hamiltoniano donde la evolución temporal (cambio con respecto al tiempo) ha sido sustituida por evolución con respecto al parámetro θ (cambio con respecto al parámetro θ). Por consiguiente cuando el parámetro θ varía de forma contínua desde un valor inicial $\theta = \theta_0$ (que puede ser $\theta_0 = 0$) hasta un cierto valor final θ_1 entonces *las coordenadas y momentos sufren unos cambios que están gobernados por ecuaciones de Hamilton*. Se trata de una evolución Hamiltoniana donde el tiempo t y la función H han sido sustituidos por θ y G respectivamente.

7.3.2 Teorema de Liouville y sistemas de Liouville

Un caso particular de grupo uniparamétrico de T.C. se obtiene considerando como parámetro θ el tiempo t. En este caso

(i) El cambio que sufren (q_i, p_i) cuando el parámetro θ varía de forma contínua desde un valor inicial θ_0 hasta un valor final θ_1 pasa a ser la evolución temporal del sistema desde el instante inicial t_0 hasta un tiempo final t_1.

(ii) La aplicación θ-dependiente Φ_θ pasa a ser la aplicación t-dependiente Φ_t y las ecuaciones que representan la transformación θ-dependiente

$$Q_i = Q_i(q, p, \theta)\,, \quad P_i = P_i(q, p, \theta)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

pasa a ser ecuaciones que representan la evolución temporal del sistema

$$q_i = q_i(q_0, p_0, t)\,, \quad p_i = p_i(q_0, p_0, t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

(iii) Los P. de P. fundamentales se mantiene invariantes a lo largo de toda la evolución temporal

$$\{q_r(t), q_s(t)\} = 0\,,\ \{p_r(t), p_s(t)\} = 0\,,\ \{q_r(t), p_s(t)\} = \delta_{rs}\,.$$

(iv) El generador G de esta familia uniparamétrica es el propio Hamiltoniano H del sistema.

En resumen la evolución temporal de un SH puede ser considerado como una sucesión de transformaciones canónicas infinitesimales generadas por la función H.

Hemos visto (en un apartado anterior) que una transformación canónica preserva el volumen del espacio de fases (teorema de Liouville para transformaciones canónicas). Puesto que la evolución temporal es una sucesión de transformaciones canónicas, llegamos a la conclusión de que se cumple la siguiente propiedad conocida como *teorema de Liouville*.

> *La evolución temporal de un sistema Hamiltoniano preserva el volumen del espacio de fases.*

Una región Ω del espacio de fases contiene un conjunto de puntos que representan posibles estados iniciales del sistema. La evolución temporal hace que cada punto se desplace trazando una trayectoria y, como consecuencia de ello, podemos considerar que la región Ω se desplaza desde su posición inicial $\Omega(t_0)$ hasta ocupar una nueva posición $\Omega(t_1)$. El teorema de Liouville establece que $\Omega(t)$ ocupa el mismo volumen en todo instante de tiempo t. Conviene resaltar que $\Omega(t)$ puede sufrir cambios de forma e incluso distorsiones importantes pero siempre de tal modo que el volumen se mantenga invariante.

Un sistema dinámico cuya evolución temporal preserva el volumen del espacio de fases se denomina *sistema de Liouville*. Es importante resaltar que todo sistema Hamiltoniano es sistema de Liouville pero el recíproco no es cierto. Existen sistemas de Liouville que no son Hamiltonianos. Podemos representar esta situación de la siguiente forma

Sistemas Hamiltonianos $\subset$ Sistemas de Liouville

Un sistema Hamiltoniano es un sistema de Liouville peculiar en el que la propiedad de Liouville es consecuencia de la existencia de P. de P. En el caso general, la propiedad de Liouville exige que se preserve el volumen pero esta propiedad es más débil que la existencia de una estructura Hamiltoniana.

7.4 Familias de transformaciones canónicas II

7.4.1 Transformaciones infinitesimales y P. de P.

Consideremos una variable dinámica (función definida en el espacio de fases) $R = R(q,p)$. Una variación del parámetro θ causará un cambio en las (q_i, p_i) que, en primer orden del parámero θ, vendrá dado por

$$(q_i, p_i) \to (q_i + \theta a_i, p_i + \theta b_i)\,.$$

El efecto causado sobre la función R vendrá dado por

$$R(q + \theta\, a, p + \theta\, b) = R(q,p) + \theta\, \delta R(q,p)\,,$$

donde δR viene dado por

$$\delta R = \Big[\, \frac{dR}{d\theta} \,\Big]_{\theta=0} = \sum_i \Big[\, \Big(\frac{\partial R}{\partial q_i}\Big) \frac{dq_i}{d\theta} + \Big(\frac{\partial R}{\partial p_i}\Big) \frac{dp_i}{d\theta} \Big]_{\theta=0}\,.$$

Recordando que se ha probado que los valores de $dq_i/d\theta$ y $dp_i/d\theta$ están relacionados con la función G, llegamos a

$$\delta R = \sum_i \left(\frac{\partial R}{\partial q_i}\, \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial R}{\partial p_i}\, \frac{\partial G}{\partial q_i} \right).$$

Consecuentemente el cambio que sufre R bajo una transformación canónica infinitesimal generada por la función G viene dada por el P. de P. de R con G

$$\delta R = \{R, G\}\,.$$

Una forma alternativa de visualizar esta propiedad es la siguiente. Las $2n$ funciones (a_j, b_j) pueden ser interpretadas geométricamente como las $2n$ componentes de un campo vectorial X_G definido en el espacio de fases $2n$-dimensional T^*Q. Si denotamos por $\mathcal{X}(T^*Q)$ el conjunto de todos los campos vectoriales definidos en el espacio T^*Q entonces tendremos que $X_G \in \mathcal{X}(T^*Q)$ estará determinado por sus $2n$ componentes

$$X_G \;\to\; (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)\,.$$

El campo vectorial X_G determina un operador diferencial de la forma

$$X_G \;\mapsto\; \sum_j a_j\, \frac{\partial}{\partial q_j} + \sum_j b_j\, \frac{\partial}{\partial p_j}$$

que representaremos con la misma notación, esto es en lo sucesivo X_G denotará tanto el campo vectorial como el operador diferencial asociado. La acción de X_G sobre una función $R(q,p)$ vendrá dada por

$$X_G(R) = \sum_j a_j \left(\frac{\partial R}{\partial q_j}\right) + \sum_j b_j \left(\frac{\partial R}{\partial p_j}\right),$$

que conduce a

$$X_G(R) = \sum_j \left(\frac{\partial G}{\partial p_j}\frac{\partial R}{\partial q_j}\right) - \sum_j \left(\frac{\partial G}{\partial q_j}\frac{\partial R}{\partial p_j}\right) = \{R, G\}.$$

El resultado anterior, que es cierto para toda variable dinámica R, puede ser aplicado al caso particular $R = H$. Consideremos un grupo uniparámetrico de T.C. generado por cierta función G; entonces el Hamiltoniano H, que determina las ecuaciones del movimiento, sufre una modificación δH que, a primer orden del parámetro θ, viene dado por

$$\delta H = \{H, G\}.$$

Como consecuencia de este resultado tenemos la siguiente propiedad

> *Las funciones que son constantes del movimiento para un Hamiltoniano H son los generadors de los grupos uni-paramétricos de Tansf. Canónicas que dejan el Hamiltoniano invariante.*

7.4.2 Acción de un grupo de transformaciones sobre una variable dinámica. Evolución temporal

Este cambio podrá ser calculado utilizando un desarrollo de Taylor

$$R(\theta) = R(0) + \left[\frac{dR}{d\theta}\right]_0 \theta + \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2R}{d\theta^2}\right]_0 \theta^2 + \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3R}{d\theta^3}\right]_0 \theta^3 + \dots$$

donde δR viene dado por

$$\left[\frac{dR}{d\theta}\right]_0 = \{R, G\}.$$

Por iteración se obtienen los coeficientes de orden superior

$$\left[\frac{d^2R}{d\theta^2}\right]_0 = \{\{R, G\}, G\}, \quad \left[\frac{d^3R}{d\theta^3}\right]_0 = \{\{\{R, G\}, G\}, G\}, \quad \dots\dots$$

La serie de Taylor para $R(\theta)$ conduce a un desarrollo en serie de potencias donde el coeficiente n-ésimo de la serie viene dado por la aplicación reiterada (por la derecha) del P. de P. con el generador G

$$R(\theta) = R(0) + \{R, G\}\,\theta + \frac{1}{2!}\{\{R, G\}, G\}\,\theta^2 + \frac{1}{3!}\{\{\{R, G\}, G\}, G\}\,\theta^3 + \dots$$

Se ha probado que cualquier función (diferenciable) G puede ser considerada como función adecuada para generar un grupo uniparamátrico de TC. Pero resultan particularmente interesantes las familias generadas por funciones con un significado dinámico interesante como por ejemplo un momento p_i o una componente J_i del momento angular.

Consideremos, a modo de ejemplo, el grupo generado por la componente J_z del momento angular. En este caso la función G viene dada por

$$G = J_z = xp_y - yp_x \,.$$

Entonces una función $R(q,p)$ sufre un cambio que viene dado por

$$R(\theta) = R(0) + \{R, J_z\}\,\theta + \frac{1}{2!}\{\{R, J_z\}, J_z\}\,\theta^2 + \frac{1}{3!}\{\{\{R, J_z\}, J_z\}, J_z\}\,\theta^3 + \ldots$$

Consideremos el efecto de esta transformación sobre la componente x del vector posición. Entonces obtenemos

$$x(\theta) = x + \{x, J_z\}\,\theta + \frac{1}{2!}\{\{x, J_z\}, J_z\}\,\theta^2 + \frac{1}{3!}\{\{\{x, J_z\}, J_z\}, J_z\}\,\theta^3 + \ldots$$

Teniendo en cuenta

$$\{x, J_z\} = -y\,, \quad \{\{x, J_z\}, J_z\} = -x\,, \quad \{\{\{x, J_z\}, J_z\}, J_z\} = y\,, \quad \ldots$$

el valor de $x(\theta)$ queda de la siguiente forma

$$x(\theta) = x - y\,\theta - \frac{1}{2!}\,x\,\theta^2 + \frac{1}{3!}\,y\,\theta^3 + \frac{1}{4!}\,x\,\theta^4 + \ldots$$

lo que conduce a

$$\begin{aligned} x(\theta) &= x\Big(1 - \frac{1}{2!}\,\theta^2 + \frac{1}{4!}\,\theta^4 \ldots\Big) - y\Big(1 - \frac{1}{3!}\,\theta^3 + \frac{1}{5!}\,\theta^5 \ldots\Big) \\ &= x\,\cos\theta - y\sin\theta\,. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la función $G = J_z$ genera el grupo uniparamétrico de rotaciones del plano xy alrededor del eje z.

En el caso particular de que el parámetro θ sea el tiempo t y la función G sea el Hamiltoniano H, la serie anterior adopta la siguiente forma

$$R(t) = R(0) + \{R, H\}\,t + \frac{1}{2!}\{\{R, H\}, H\}\,t^2 + \frac{1}{3!}\{\{\{R, H\}, H\}, H\}\,t^3 + \ldots$$

Es claro que si R es constante del movimiento entonces $\{R, H\} = 0$ y $R(t) = R(0)$. Por otra parte este desarrollo particularizado para $R = q_i$ y $R = p_i$ nos permite obtener la solución de la dinámica

$$q_i(t) \;=\; q_{i0} + \{q_i, H\}_0\,t + \frac{1}{2!}\{\{q_i, H\}, H\}_0\,t^2 + \frac{1}{3!}\{\{\{q_i, H\}, H\}, H\}_0\,t^3 + \ldots$$

$$p_i(t) \;=\; p_{i0} + \{p_i, H\}_0\, t + \frac{1}{2!}\{\{p_i, H\}, H\}_0\, t^2 + \frac{1}{3!}\{\{\{p_i, H\}, H\}, H\}_0\, t^3 + \dots$$

Consideremos a modo de ejemplo el Hamiltoniano del oscilador armónico

$$G = H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}k\,x^2\,, \quad k = m\,\omega^2\,.$$

Entonces la posición x de la partícula como función del tiempo t viene dada por

$$x(t) = x_0 + \{x, H\}_0\, t + \frac{1}{2!}\{\{x, H\}, H\}_0\, t^2 + \frac{1}{3!}\{\{\{x, H\}, H\}, H\}_0\, t^3 + \dots$$

Teniendo en cuenta

$$\{x, H\} = \frac{p}{m}\,, \quad \{p, H\} = -\,kx$$

obtenemos

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{m}\,p_0 - \frac{1}{2!}\frac{k}{m}\,x_0\,t^2 + \frac{1}{3!}\frac{k}{m^2}\,p_0\,t^3 + \frac{1}{4!}\frac{k^2}{m^2}\,x\,t^4 + \dots$$

lo que conduce a

$$\begin{aligned} x(t) \;&=\; x_0\Big(1 - \frac{1}{2!}\,(\omega t)^2 + \frac{1}{4!}\,(\omega t)^4 \dots\Big) + \frac{p_0}{m\omega}\Big(\omega t - \frac{1}{3!}\,(\omega t)^3 + \frac{1}{5!}\,(\omega t)^5 \dots\Big) \\ &=\; x_0\,\cos\omega t + \Big(\frac{1}{m\,\omega}\Big)\,p_0\,\sin\omega t\,. \end{aligned}$$